
Suites.

Corrigés d'exercices

Version du 05/10/2013

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 23 : N°11

Page 32 : N°29, 30, 33, 35

Page 33 : N°38

Page 34 : N°47, 48, 54, 57, 58, 64

Page 36 : N°74, 77

Page 37 : N°82, 84

Page 40 : N°95

Page 41 : N°98

Page 42 : N°103

Page 43 : N°104, 109

Page 44 : N°110

Page 45 : N°115, 117

Page 49 : N°134

N°11 page 23

a. Pour tout entier naturel n , on a : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$.

On en tire alors, pour tout entier naturel n non nul : $-\frac{1}{n} \leq \sin(n) \leq \frac{1}{n}$.

Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont toutes deux convergentes de limite nulle.

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure :

La suite (u_n) est convergente de limite nulle.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on a : $v_n = \frac{n + \cos(n)}{n} = 1 + \frac{\cos(n)}{n}$.

Comme précédemment, on montre facilement que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

On en déduit alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\cos(n)}{n} \right] = 1 + 0 = 1$.

La suite (v_n) est convergente de limite égale à 1.

N°29 page 32

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la propriété \mathcal{P}_n suivante :

$$\mathcal{P}_n : \ll 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \gg$$

Initialisation

Pour $n = 1$, on a : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = 1^3 = 1$, d'une part, et $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = 1$, d'autre part. Les deux expressions fournissent le même résultat. On en déduit que la propriété \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_n vraie. On a donc : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Intéressons-nous alors à la somme $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3$.

On a :

$$\begin{aligned} \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{\substack{= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \text{(d'après l'hypothèse} \\ \text{de récurrence)}}} + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} \times [n^2 + 4(n+1)] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \times (n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2}{4} \times (n+2)^2 \\ &= \frac{(n+1)^2 [(n+1)+1]^2}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Remarque : en notant que l'on a $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1+2+\dots+n)^2$, on peut aussi écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la propriété \mathcal{P}_n suivante :

$$\mathcal{P}_n : \left\langle \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \right\rangle$$

Initialisation

Pour $n = 1$, on a : $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$, d'une part, et

$$\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} = \frac{1 \times (1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{1 \times 4}{4 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}, \text{ d'autre part. Les deux expressions}$$

fournissent le même résultat. On en déduit que la propriété \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_n vraie. On a donc :

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Intéressons-nous alors à la somme :

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)}$$

On a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \\ \text{(d'après l'hypothèse} \\ \text{de récurrence)}}} \\ & = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} \\ & = \frac{1}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \times \left[n(n+3)^2 + 4 \right] \\ & = \frac{n(n+3)^2 + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ & = \frac{n(n^2 + 6n + 9) + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ & = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

En remplaçant « n » par « $n+1$ » dans l'expression $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$, on obtient :

$$\frac{(n+1)((n+1)+3)}{4((n+1)+1)((n+1)+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\text{Or : } (n+1)^2(n+4) = (n^2 + 2n+1)(n+4) = n^3 + 6n^2 + 9n + 4.$$

On en déduit ainsi :

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{(n+1)((n+1)+3)}{4((n+1)+1)((n+1)+2)}$$

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

N°30 page 32

Pour tout entier naturel n , on considère la propriété \mathcal{P}_n suivante :

\mathcal{P}_n : « la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée vérifie :
pour tout réel x , on a $f_n'(x) = n x^{n-1}$. »

Initialisation

La fonction f_0 est définie sur \mathbb{R} par $f_0 : x \mapsto x^0 = 1$. Elle est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction constante et pour tout x réel, on a : $f_0'(x) = 0$.

Par ailleurs, pour $n=0$, la fonction $x \mapsto n x^{n-1}$ correspond, formellement, à la fonction nulle du fait du coefficient « n ».

On déduit de ce qui précède que la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_n vraie. On suppose donc que, pour cette valeur de n , la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $f_n' : x \mapsto n x^{n-1}$.

On s'intéresse maintenant à la fonction $f_{n+1} : x \mapsto x^{n+1}$.

Pour tout x réel, on a immédiatement : $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x f_n(x)$.

Ainsi, la fonction f_{n+1} peut-elle être considérée comme le produit, défini sur \mathbb{R} , de la fonction identité et de la fonction f_n , toutes deux dérivables sur \mathbb{R} . Il en résulte que la fonction f_{n+1} est également dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout x réel, on a alors :

$$f_{n+1}'(x) = 1 \times f_n(x) + x \times \underbrace{f_n'(x)}_{=n x^{n-1}} = x^n + x \times n x^{n-1} = (n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}$$

(d'après l'hypothèse de récurrence)

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

Pour tout entier naturel n , la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée vérifie :
pour tout réel x , on a $f_n'(x) = n x^{n-1}$.

N°33 page 32

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la propriété \mathcal{P}_n suivante :

$$\mathcal{P}_n : \ll 1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)! \leq n! \gg$$

Initialisation

Pour $n = 2$, on a $1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)! = 1! = 1$, d'une part, et $n! = 2! = 2$, d'autre part.

Comme $1 \leq 2$, on en conclut immédiatement que la propriété \mathcal{P}_2 est vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_n vraie. On suppose donc que, pour cette valeur de n , on a :

$$1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)! \leq n!$$

On s'intéresse maintenant à la somme $1! + 2! + 3! + \dots + (n-1)! + n!$.

On a :

$$\underbrace{1!+2!+3!+\dots+(n-1)!+n!}_{\substack{\leq n! \\ \text{(d'après l'hypothèse} \\ \text{de récurrence)}}} \leq n!+n! = 2 \times n!$$

On a, par ailleurs : $(n+1)! - 2n! = (n+1) \times n! - 2n! = n! \times [(n+1) - 2] = (n-1) \times n!$.

Comme $n \geq 2$, il vient $n-1 \geq 1 > 0$ et donc $(n-1) \times n! > 0$.

Ainsi : $(n+1)! - 2n! > 0$ et, finalement : $1!+2!+3!+\dots+(n-1)!+n! < (n+1)!$.

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$1!+2!+3!+\dots+(n-1)! \leq n!$$

N°35 page 32

1. On a facilement :

$$v_0 = 0 \text{ (dans l'énoncé)}$$

$$v_1 = v_0 + 2 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$v_2 = v_1 + 2 \times 1 + 1 = 1 + 3 = 4$$

$$v_3 = v_2 + 2 \times 2 + 1 = 4 + 5 = 9$$

$$v_4 = v_3 + 2 \times 3 + 1 = 9 + 7 = 16$$

0, 1, 4, 9 et 16 sont les carrés des cinq premiers entiers naturels ... On peut conjecturer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2.$$

2. Pour tout entier naturel n , on considère, d'après la question précédente, la propriété \mathcal{P}_n suivante :

$$\mathcal{P}_n : \ll v_n = n^2 \gg$$

Initialisation

D'après la question précédente, \mathcal{P}_0 (ce qui suffit pour initialiser le raisonnement), \mathcal{P}_1 ,

\mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_3 et \mathcal{P}_4 sont vraies.

Hérédité

Soit n un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que la propriété \mathcal{P}_n est vraie. C'est-à-dire : $v_n = n^2$.

Suites

Corrigés d'exercices / Version du 05/10/2013

Par définition de la suite (v_n) , on a : $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$ d'où, en tenant compte de l'hypothèse de récurrence : $v_{n+1} = v_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{n+1} .

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2$$

N°38 page 33

Pour tout entier naturel n , on considère la propriété \mathcal{P}_n suivante :

$$\mathcal{P}_n : \ll u_n = 4 \times 3^n - 1 \gg$$

Initialisation

Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = 3$, d'une part, et $4 \times 3^n - 1 = 4 \times 3^0 - 1 = 4 - 1 = 3$, d'autre part. De l'égalité on conclut immédiatement que la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_n vraie. On suppose donc que, pour cette valeur de n , on a : $u_n = 4 \times 3^n - 1$.

On s'intéresse maintenant à u_{n+1} .

Par définition de la suite (u_n) , on a : $u_{n+1} = 3u_n + 2$. D'où, en tenant compte de l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = 3u_n + 2 = 3(4 \times 3^n - 1) + 2 = 3 \times 4 \times 3^n - 3 + 2 = 4 \times 3^{n+1} - 1$$

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } u_n = 4 \times 3^n - 1.$$

N°47 page 34

a. Comme $x \in \mathbb{R}_+$, on a $2x+1 \in \mathbb{R}_+^*$ et donc, en tenant compte également de $e > 0$:

$$\frac{3}{2x+1} < e \Leftrightarrow 3 < e(2x+1) \Leftrightarrow 3 < 2ex + e \Leftrightarrow 3 - e < 2ex \Leftrightarrow \frac{3-e}{2e} < x$$

- Si $3 - e < 0$, c'est-à-dire $e > 3$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2x+1} < e$ est \mathbb{R}_+ .
- Si $3 - e \geq 0$, c'est-à-dire $e \in]0; 3]$ (n'oublions pas que le réel e est strictement positif) alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2x+1} < e$ est l'intervalle $\left] \frac{3-e}{2e}; +\infty \right[$.

b. a. On a : $u_n < e \Leftrightarrow \frac{3}{2n+1} < e$.

D'après la question précédente, il vient (on résout en fait l'inéquation dans \mathbb{N} cette fois-ci) :

- Si $3 - e < 0$, c'est-à-dire $e > 3$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2n+1} < e$ est \mathbb{N} .
- Si $3 - e \geq 0$, c'est-à-dire $e \in]0; 3]$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2n+1} < e$ est l'ensemble des nombres entiers naturels appartenant à l'intervalle $\left[E\left(\frac{3-e}{2e}\right) + 1; +\infty \right[$ où $E\left(\frac{3-e}{2e}\right)$ désigne la partie entière du réel $\frac{3-e}{2e}$ ($E\left(\frac{3-e}{2e}\right) + 1$ est donc le plus petit entier naturel solution de l'inéquation $\frac{3}{2n+1} < e$).

Ainsi, pour toute valeur de e dans \mathbb{R}_+^* , il existe un rang N tel que $n \geq N \Rightarrow u_n < e$ ($N = 0$ si $e > 3$ et $N = E\left(\frac{3-e}{2e}\right) + 1$ si $e \in]0; 3]$).

b. Pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$. D'après la question précédente, pour tout réel strictement positif e , il existe un rang N tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n < e$, d'où $u_n \in]-e; e[$.

Par définition, on en conclut alors que la suite (u_n) converge vers 0.

N°48 page 34

$$u_n = \frac{2}{n} \quad (n > 0)$$

a. On a, $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par : $x \mapsto f(x) = \frac{2}{x}$.

La fonction inverse étant strictement décroissante sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* , il en va de même pour la suite (u_n) .

b. On conjecture, par exemple à l'aide de la calculatrice ou en utilisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, que l'on

a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

c. On cherche un rang p tel que : $n \geq p \Rightarrow u_n \in]-10^{-4}; 10^{-4}[$.

Les termes de la suite étant strictement positifs, on a : $u_n \in]-10^{-4}; 10^{-4}[\Leftrightarrow u_n < 10^{-4}$.

Il vient alors :

$$u_n < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{2}{n} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{10^{-4}} \Leftrightarrow \frac{n}{2} > 10^4 \Leftrightarrow n > 2 \times 10^4 = 20\,000$$

On peut donc choisir $p = 20\,001$

d. On généralise la démarche de la question précédente en remplaçant 10^{-4} par un réel e strictement positif :

$$u_n < e \Leftrightarrow \frac{2}{n} < e \Leftrightarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow n > \frac{2}{e} \Leftrightarrow n \geq E\left(\frac{2}{e}\right) + 1$$

Pour tout réel strictement positif e , on pose $N = E\left(\frac{2}{e}\right) + 1$ et on a : $n \geq N \Rightarrow u_n < e$.

On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite nulle.

$$u_n = \frac{1}{1 + \sqrt{n}}$$

a. On a, $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par : $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Il en va donc de même de la fonction $x \mapsto 1 + \sqrt{x}$. La fonction inverse est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* . La fonction f , composée de ces deux fonctions, est donc elle-même strictement décroissante.

Il en va de même pour la suite (u_n) .

b. On conjecture, par exemple à l'aide de la calculatrice ou en utilisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{n}) = +\infty$, que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

c. On cherche un rang p tel que : $n \geq p \Rightarrow u_n \in]-10^{-4}; 10^{-4}[$.

Les termes de la suite étant strictement positifs, on a : $u_n \in]-10^{-4}; 10^{-4}[\Leftrightarrow u_n < 10^{-4}$.

Il vient alors :

$$u_n < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{n}} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{10^{-4}} < 1 + \sqrt{n} \Leftrightarrow 10^4 - 1 < \sqrt{n}$$

Les deux membres de la dernière inégalité étant positifs, on a :

$$10^4 - 1 < \sqrt{n} \Leftrightarrow (10^4 - 1)^2 < n$$

On peut donc choisir $p = (10^4 - 1)^2 + 1 = 99\,980\,002$.

d. Ici encore, on généralise la démarche de la question précédente en remplaçant 10^{-4} par un réel e strictement positif :

$$u_n < e \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{n}} < e \Leftrightarrow \frac{1}{e} < 1 + \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{e} - 1 < \sqrt{n}$$

En toute rigueur, on doit distinguer deux cas :

- Si $e > 1$ alors $\frac{1}{e} - 1 < 0$ et l'inégalité $\frac{1}{e} - 1 < \sqrt{n}$ est vérifiée pour toute valeur de n .
- Si $e \leq 1$ alors $\frac{1}{e} - 1 \geq 0$ et on a : $\frac{1}{e} - 1 < \sqrt{n} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{e} - 1\right)^2 < n$. On peut alors

$$\text{considérer } N = E\left(\left(\frac{1}{e} - 1\right)^2\right) + 1.$$

Dans tous les cas, on peut trouver une valeur N telle que : $n \geq N \Rightarrow u_n < e$.

On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite nulle.

N°54 page 34

Nous allons établir le résultat en utilisant la définition. Il convient donc de montrer que pour tout réel A , il existe un rang N à partir duquel on a $u_n < A$.

Soit donc A un réel.

$$\text{On a : } -2n^2 + 3 < A \Leftrightarrow 2n^2 > 3 - A \Leftrightarrow n^2 > \frac{3 - A}{2}.$$

On distingue donc deux situations :

- Si $A > 3$ alors $\frac{3-A}{2} < 0$ et l'inégalité $n^2 > \frac{3-A}{2}$ est vérifiée pour tout entier naturel n . Il suffit alors de choisir $N = 0$ par exemple.
- Si $A \leq 3$ alors $\frac{3-A}{2} \geq 0$ et on a : $n^2 > \frac{3-A}{2} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{3-A}{2}}$.

Il suffit alors de considérer : $N = E\left(\sqrt{\frac{3-A}{2}}\right) + 1$.

Dans tous les cas, pour un A réel quelconque fixé, on peut trouver une valeur N telle que :
 $n \geq N \Rightarrow u_n < A$.

On en déduit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$.

N°57 page 34

a. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \end{array} \right\} \text{produit} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

b. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, nous avons affaire à une forme indéterminée du type
 « $\infty - \infty$ ».

Pour tout entier naturel n , on a : $n^3 - n^2 = n^2(n-1)$.

On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1) = -1 \end{array} \right\} \text{somme} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty \end{array} \right\} \text{produit} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(n-1) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

N°58 page 34

a. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{produit} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty \end{array} \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{somme} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) = +\infty \end{array} \left. \right\} \begin{array}{l} \text{rapport} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2n+1} = 0 \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

b. On a, en procédant de façon similaire :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{somme} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty \end{array} \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2) = -2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rapport} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n+1} = 0 \end{array} \left. \right\} \begin{array}{l} \text{somme} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{-2}{n+1} \right) = 5 \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 5$$

N°64 page 34a. Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{(n+1)(3-n)}{2n^2+1} = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \times n \left(\frac{3}{n} - 1 \right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{3}{n} - 1 \right)}{2 + \frac{1}{n^2}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, il vient (somme) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n} - 1 \right) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2} \right) = 2$$

$$\text{Et enfin : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{3}{n} - 1\right)}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 \times (-1)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{2}$$

b. On procède de façon similaire. Pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = \left(n - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{2n^2}\right) = n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \times \frac{1}{2n^2} \times n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, il vient (somme) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Et enfin (produit) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$$

N°74 page 36

1. Comme, pour tout entier naturel n , on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, il vient : $\frac{-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que la suite (u_n) est convergente et que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. On procède de façon similaire à ce qui vient d'être fait.

Comme, pour tout entier naturel n , on a : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, il vient : $\frac{-1}{n^2} \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que la suite (v_n) est convergente et que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

$$(v_n) \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

N°77 page 36

1. A la calculatrice, on obtient :

$$u_{10} \approx 1,996\,357$$

$$u_{100} \approx 1,999\,952$$

Il semble que la suite (u_n) converge vers 2.

2. Pour tout n entier naturel, on a : $-1 \leq \sin n \leq 1$.

On en déduit : $-3 \leq -3 \sin n \leq 3$ puis : $2n^2 - 3 \leq 2n^2 - 3 \sin n \leq 2n^2 + 3$ et, enfin :

$$\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} \leq \frac{2n^2 - 3 \sin n}{n^2 + 1} \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$$

C'est-à-dire : $\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$.

Le résultat est ainsi établi.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} = \frac{n^2 \left(2 - \frac{3}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \quad \text{et} \quad \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} = \frac{n^2 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$, il vient (somme) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n^2}\right) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$$

On en déduit finalement (rapport) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que la suite (u_n) est convergente de limite égale à 2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

3. a. A la question 2, nous avons obtenu, pour tout entier naturel n :

$$\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$$

On en déduit immédiatement : $\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} - 2 \leq u_n - 2 \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} - 2$.

$$\text{Soit : } \frac{2n^2 - 3 - 2(n^2 + 1)}{n^2 + 1} \leq u_n - 2 \leq \frac{2n^2 + 3 - 2(n^2 + 1)}{n^2 + 1}.$$

$$\text{Soit encore : } \frac{-5}{n^2 + 1} \leq u_n - 2 \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

On a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-5}{n^2 + 1} \leq u_n - 2 \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

b. Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{5}{n^2 + 1}$, l'inégalité obtenue à la question précédente entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-5}{n^2 + 1} \leq u_n - 2 \leq \frac{5}{n^2 + 1}$$

$$\text{Soit : } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \frac{5}{n^2 + 1}.$$

Ainsi, si, à partir d'un certain rang N , on a l'inégalité : $\frac{5}{n^2 + 1} < 10^{-3}$ alors, on aura également l'inégalité $|u_n - 2| < 10^{-3}$. En d'autres termes, la distance entre u_n et 2 sera inférieure à 10^{-3} .

On a :

$$\frac{5}{n^2+1} < 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{n^2+1}{5} > 10^3 \Leftrightarrow n^2+1 > 5\,000 \Leftrightarrow n^2 > 4\,999 \Leftrightarrow n > \sqrt{4\,999}$$

Or : $\sqrt{4\,999} \approx 70,7$. Ainsi, pour $n \geq 71$, on aura $\frac{5}{n^2+1} < 10^{-3}$ et donc $|u_n - 2| < 10^{-3}$.

A partir du rang $N = 71$, on est certain que la distance entre u_n et 2 est inférieure à 10^{-3} .

c. On a $u_n = \frac{2n^2 - 3\sin n}{n^2 + 1} = \frac{2(n^2 + 1) - 2 - 3\sin n}{n^2 + 1} = 2 - \frac{2 + 3\sin n}{n^2 + 1}$.

Si $2 + 3\sin n < 0$, c'est-à-dire $\sin n < -\frac{2}{3}$ alors on aura $u_n > 2$.

En l'occurrence $\sin 74 \approx -0,985 < -\frac{2}{3}$ et $u_{74} \approx 2,000\,174$.

Pour tout entier $n \geq 71$, on n'a pas nécessairement $u_n \leq 2$.

N°82 page 37

1. L'objectif de cette question est d'établir la croissance de la suite u .

On a immédiatement :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= u_n^2 + 3u_n + 1 \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= u_n^2 + 3u_n + 1 - u_n \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= u_n^2 + 2u_n + 1 \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= (u_n + 1)^2 \end{aligned}$$

Comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n + 1)^2 \geq 0$, la relation de récurrence définissant la suite u entraîne donc sa croissance et ce, quelle que soit la valeur de u_0 . Il n'est donc pas utile de montrer que l'on a $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n (une récurrence simple permet d'établir ce résultat) qui s'avère une conséquence immédiate de cette croissance et du fait que u_0 est égal à 0.

La suite u est croissante.

2. On suppose que la suite u est majorée.

Dès lors, étant croissante et majorée, la suite u est convergente. Notons L sa limite.

Suites

Corrigés d'exercices / Version du 05/10/2013

A la question précédente, on a montré que l'on avait : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)^2$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = L - L = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 1)^2 = (L + 1)^2$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 1)^2$, il vient donc

$0 = (L + 1)^2$ soit, finalement : $L = -1$.

Si la suite u est majorée alors on a nécessairement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

3. Le résultat précédent est absurde puisque l'on a, d'après la question 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. Il en résulte alors que la limite L de la suite u est nécessairement positive. Ainsi, la limite L ne peut être égale à -1 .

Aboutissant à une contradiction, on en tire que la suite u n'est pas majorée.

Étant croissante, elle tend donc vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

4. a. Nous proposons l'algorithme suivant, écrit en langage pseudo-naturel :

```
Variable :   N entier
             U réel
             A réel

Début :
             N ← 0
             U ← 0
             Lire A
             TantQue U < A
                 Faire N ← N+1
                    U ← U2 + 3U + 1
             FinTantQue
             Afficher N

Fin
```

b. Pour $A = 1\,000$, on obtient : $N = 4$.

Pour vérifier : $u_3 = 41$ et $u_4 = 1\,805$

Pour $A = 10^6$, on obtient : $N = 5$.

Pour vérifier : $u_4 = 1\,805$ et $u_5 = 3\,263\,441$

Sur ma CASIO, j'ai écrit le programme suivant :

```

82P37
?→A↵
0→N↵
0→U↵
While U<A↵
N+1→N↵
U²+3×U+1→U↵
TOP BOTTOM SEARCH MENU A↔a CHAR

82P37
0→U↵
While U<A↵
N+1→N↵
U²+3×U+1→U↵
WhileEnd↵
N↓
COMMAND CONTROL JUMP ? ▲ ▶

```

N°84 page 37

1. Comme $\frac{2}{3} \in]-1; +1[$, on a immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Il vient alors (différence) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 1 - 0 = 1$ puis (rapport) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{1} = 2.$$

Enfin (différence) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}\right) = 1 - 2 = -1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$$

2. Comme 6 et 7 sont deux réels strictement supérieurs à 1, on a immédiatement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 6^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n = +\infty$$

Pour (v_n) , nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

Comme $7 > 6$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 7^n > 6^n$. On va donc factoriser par 7^n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 6^n - 7^n = 7^n \left(\frac{6^n}{7^n} - 1 \right) = 7^n \left(\left(\frac{6}{7} \right)^n - 1 \right)$$

Comme $0 < 6 < 7$, il vient $\frac{6}{7} \in]-1; +1[$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{7} \right)^n = 0$.

On en déduit (somme) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{6}{7} \right)^n - 1 \right) = -1$ puis (produit) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n \left(\left(\frac{6}{7} \right)^n - 1 \right) = -\infty$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$
--

N°95 page 40

Partie A – Question de cours

Soit A un réel.

Comme la suite (u_n) tend vers $+\infty$, il existe un rang N tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n > A$.

Mais comme, pour tout entier naturel n , $v_n \geq u_n$, il vient : $n \geq N \Rightarrow v_n > A$.

On en déduit ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Le résultat est établi.

Partie B

1. On a :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} \times 1 - 2 = \boxed{-\frac{5}{3}}$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3} \right) - 1 = -\frac{5}{9} - 1 = \boxed{-\frac{14}{9}}$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{9} \right) = \boxed{-\frac{14}{27}}$$

2. a. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on considère la propriété \mathcal{P}_n suivante :

$$\mathcal{P}_n : \ll u_n \geq 0 \gg$$

Initialisation

Pour $n = 4$, on a : $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{27}\right) + 1 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81} > 0$.

La propriété \mathcal{P}_4 est donc vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel quelconque fixé supérieur ou égal à 4.

On suppose \mathcal{P}_n vraie c'est-à-dire $u_n \geq 0$

Comme $n \geq 4$ alors on a : $n - 2 \geq 2 > 0$.

Comme $u_n \geq 0$ alors on a : $\frac{1}{3}u_n \geq 0$.

On en déduit alors $\frac{1}{3}u_n + n - 2 > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$. La propriété \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

Conclusion

Pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $u_n \geq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow u_n \geq 0$$

b. Pour tout entier $n \geq 5$, on a : $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 2 = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3$.

Mais $n \geq 5 \Leftrightarrow n - 1 \geq 4$. D'après le résultat de la question précédente, on a donc : $u_{n-1} \geq 0$.

D'où $\frac{1}{3}u_{n-1} \geq 0$ puis $\frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geq n - 3$ c'est-à-dire $u_n \geq n - 3$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \Rightarrow u_n \geq n - 3$$

c. On a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \Rightarrow u_n \geq n - 3$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 3) = +\infty$, le théorème de comparaison nous permet alors de conclure immédiatement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

3. a. Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3(n+1) - \frac{21}{2} \\ &= -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Par ailleurs : $v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -2 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$.

La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = -\frac{25}{2}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

b. D'après le résultat précédent, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n = -v_n + 3n - \frac{21}{2}$, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}\left(-v_n + 3n - \frac{21}{2}\right).$$

Il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}\left(-v_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(-\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

c. On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right) = +\infty$.

Par ailleurs, comme $\frac{1}{3} \in]-1; +1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

On en déduit alors (somme) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right) = +\infty$ soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

On a ainsi retrouvé la limite de la suite (u_n) obtenue à la question 2.c.

4. Rappelons que l'on a (question 3.b.) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

On en tire, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}k - \frac{21}{4} \right) \\ &= \frac{25}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^n k - \frac{21}{4} \sum_{k=0}^n 1 \end{aligned}$$

On a immédiatement :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] \\ \sum_{k=0}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n 1 = n+1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{25}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^n k - \frac{21}{4} \sum_{k=0}^n 1 \\ &= \frac{25}{4} \times \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) \\ &= \frac{75}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] + \frac{3n(n+1)}{4} - \frac{21(n+1)}{4} \\ &= \frac{75}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] + \frac{3}{4}(n-7)(n+1) \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{3} \in]-1; +1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{75}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] = \frac{75}{8} \times (1-0) = \frac{75}{8}$.

Par ailleurs : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n-7) = +\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}(n-7)(n+1) = +\infty$.

Ainsi, on a finalement (somme) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{75}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] + \frac{3}{4}(n-7)(n+1) \right\} = +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

N°98 page 41

Partie A

- P_1 est **fausse** car pour $n = 1$, on a : $4^n = 4^1 = 4$ mais $4n+1 = 4 \times 1 + 1 = 5 > 4$.
 P_2 est **fausse** car pour $n = 2$, on a $4^n = 4^2 = 16$ mais $4n+1 = 4 \times 2 + 1 = 9 < 16$.
 P_3 est **vraie** car l'inégalité $4^n \leq 4n+1$ est vérifiée pour $n = 1$.
 P_4 est **fausse** car l'inégalité $4^n \leq 4n+1$ est vérifiée pour $n = 0$ ($1 \leq 1$) et $n = 1$.
- La négation de « Pour tout entier n , $4^n > 4n+1$ » est « il existe un entier n tel que $4^n \leq 4n+1$ ». Il s'agit donc de la proposition P_3 .

Partie B

- a. $4(p+1)+1-4(4p+1) = 4p+4+1-16p-4 = -12p+1$
b. Pour tout entier $p \geq 1$, on a : $-12p \leq -12$ d'où $-12p+1 \leq -11 < 0$.
En reprenant le résultat de la question a. on a donc :

$$4(p+1)+1-4(4p+1) = -12p+1 < 0$$

D'où : $4(p+1)+1 < 4(4p+1)$. Le résultat est ainsi établi.

- En testant quelques valeurs faibles de n (ou en réfléchissant à la croissance de 4^n et à celle de $4n+1$... ☺), on peut conjecturer que l'inégalité est vérifiée pour $n \geq 2$.
Démontrons cette conjecture par récurrence.

On considère donc, pour tout n entier supérieur ou égal à 2, la propriété :

$$\mathcal{P}_n : \ll 4^n > 4n+1 \gg$$

Initialisation

Pour $n = 2$, on a : $4^n = 4^2 = 16$ et $4n+1 = 4 \times 2 + 1 = 9$. On a $16 > 9$.
La propriété \mathcal{P}_2 est donc vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel quelconque fixé supérieur ou égal à 2.

On suppose \mathcal{P}_n vraie c'est-à-dire $4^n > 4n + 1$.

On s'intéresse à \mathcal{P}_{n+1} . On va donc comparer 4^{n+1} et $4(n+1)+1$.

Comme $4^n > 4n + 1$ (hypothèse de récurrence), on a : $4 \times 4^n > 4 \times (4n + 1)$, c'est-à-dire $4^{n+1} > 4 \times (4n + 1)$.

Comme n est supérieur ou égal à 2, on peut utiliser le résultat de la question 1.b : on a donc $4 \times (4n + 1) > 4 \times (n + 1) + 1$.

Finalement : $4^{n+1} > 4 \times (4n + 1) > 4 \times (n + 1) + 1$.

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow 4^n > 4n + 1$

N°103 page 42**Partie A**

1. Une suite (u_n) n'est pas majorée si, pour tout réel M , on peut trouver un rang N (ce rang dépend donc A PRIORI du réel M), tel que $u_N \geq M$.

2. a. La suite étant croissante, on a : $n \geq n_0 \Leftrightarrow u_n \geq u_{n_0}$.

Comme $u_{n_0} > M$, on en déduit immédiatement $u_n > M$.

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n > M$.

b. D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que pour tout réel M , il existe un certain rang n_0 tel que à partir de ce rang tous les termes de la suite sont dans l'intervalle

$]M; +\infty[$. Ainsi, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. On vient d'établir le résultat fondamental :

Pour toute suite (u_n) croissante et non majorée, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Partie B

1. Récurrence immédiate (pour l'hérédité, si on suppose $u_n \geq 1$, on a $u_n > 0$ et donc $\frac{1}{u_n} > 0$).

On en déduit $u_n + \frac{1}{u_n} > 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$, à fortiori $u_{n+1} \geq 1$).

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$$

2. A la question précédente, on a établi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

On en déduit immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

3. a. La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

La suite (u_n) converge.

- b. On a, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

La suite (u_n) étant convergente, il en va de même pour les suites (u_{n+1}) et $\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$ et il

vient, d'après l'égalité ci-dessus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n}$$

La limite de la suite (u_n) est bien solution de l'équation $x = x + \frac{1}{x}$.

La limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x = x + \frac{1}{x}$.

4. On a $x = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0$ qui n'admet pas de solution. L'hypothèse « (u_n) majorée » conduit donc à une contradiction. On en déduit que la suite (u_n) n'est pas majorée.

Comme la suite (u_n) est croissante, on en déduit (cf. la partie A) qu'elle tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

N°104 page 43

1. Pour tout entier naturel n , on a :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \right) - u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = -\frac{2}{3}v_n$$

On en déduit immédiatement que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$.

Par ailleurs, on a : $v_0 = u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$.

Finalement :

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

2. Pour tout entier naturel n , on a :

$$w_{n+1} = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} = \left(\frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \right) + \frac{2}{3}u_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = w_n$$

On en déduit que la suite (w_n) est constante.

La suite (w_n) est constante.

3. On a : $w_1 = u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 1 + \frac{2}{3} \times 0 = 1$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 1.$$

4. D'après la première question, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

On a aussi : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = 1 = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

On en déduit :

$$u_{n+1} = u_n + v_n = u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \text{ et } 1 = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{3}u_n$$

$$\text{Finalement : } u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

$$\text{Comme } -\frac{2}{3} \in]-1; +1[, \text{ on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ et on en tire enfin : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times 0 = \frac{3}{5}.$$

La suite (u_n) converge et admet pour limite $\frac{3}{5}$.

N°109 page 43

1. On pose \mathcal{P}_n : « $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$ ».

Initialisation.

Pour $n = k$, on a $\frac{k^n}{n!} = \frac{k^k}{k!}$ et l'inégalité (qui, dans ce cas, est une égalité) est trivialement vérifiée.

Hérédité.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à k fixé. On suppose \mathcal{P}_n vraie.

On a donc : $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$.

On a $n+1 > n \geq k$. Donc : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$ et donc : $\frac{k}{n+1} < \frac{k}{n} \leq \frac{k}{k} = 1$. D'où : $\frac{k}{n+1} < 1$.

Il vient alors : $\frac{k}{n+1} \times \frac{k^n}{n!} < 1 \times \frac{k^n}{n!}$, c'est-à-dire $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{k^n}{n!}$.

Comme $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$, on en déduit finalement : $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{k^k}{k!}$.

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

Conclusion.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \Rightarrow \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

2. A la question précédente, on a établi que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k ,

$$\text{on avait : } \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}. \text{ Soit : } \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{k^n} \times \frac{k^k}{k!}.$$

Pour tout réel x positif et tout entier naturel n , on a : $x^n \geq 0$.

$$\text{D'où : } \frac{x^n}{n!} \leq \frac{x^n}{k^n} \times \frac{k^k}{k!} = \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } k : \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$

3. Comme $0 \leq x < k$, on a : $0 \leq \frac{x}{k} < 1$ et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$ puis, l'entier k étant fixé :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!} \right] = 0$$

Comme $0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$, il vient enfin, grâce au théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

N°110 page 44

1. On a facilement :

$$u_1 = \frac{1!}{1^1} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

$$u_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$u_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{6}{27} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

$$u_5 = \frac{5!}{5^5} = \frac{120}{3125} = \boxed{\frac{24}{625}}$$

$$u_{10} = \frac{10!}{10^{10}} = \frac{3\,628\,800}{10\,000\,000\,000} = \boxed{\frac{567}{1\,562\,500}}$$

Il semble que la suite (u_n) soit décroissante.

2. a. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \\ &= \frac{\cancel{n!}}{(n+1) \times \cancel{n!}} \times \frac{\cancel{(n+1)} \times (n+1)^n}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel n et tout réel $x \geq -1$ (attention à l'erreur dans l'énoncé !!!), on

a : $(1+x)^n \geq 1+nx$. En prenant $x = \frac{1}{n}$, il vient : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \times \frac{1}{n} = 2$. Le résultat est ainsi établi.

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$.

b. Pour tout n entier naturel non nul, on a : $n! > 0$ et $n^n > 0$. On en déduit : $u_n > 0$.

D'après la question précédente, il vient alors :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2 \Leftrightarrow 2u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

La suite (u_n) est strictement décroissante.

3. a. On veut montrer : pour tout entier naturel non nul, $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Varions les plaisirs en ne suivant pas l'indication du livre mais en procédant ... par récurrence ! ☺

Nous posons donc : \mathcal{P}_n : « $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ».

Initialisation

Pour $n = 1$, on a : $u_1 = 1$ et $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = 1$.

On a bien $u_1 \leq \frac{1}{2^{1-1}}$: la propriété \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité

Soit N un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_N vraie, c'est-à-dire : $u_N \leq \frac{1}{2^{N-1}}$.

On veut montrer que \mathcal{P}_{N+1} est vraie, soit : $u_{N+1} \leq \frac{1}{2^{(N+1)-1}} = \frac{1}{2^N}$.

D'après la question 2.a. on a : $u_{N+1} \leq \frac{1}{2} u_N$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $u_N \leq \frac{1}{2^{N-1}}$. D'où : $\frac{1}{2} u_N \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{N-1}} = \frac{1}{2^N}$.

Finalement : $u_{N+1} \leq \frac{1}{2} u_N \leq \frac{1}{2^N}$. Le résultat est établi.

La propriété \mathcal{P}_{N+1} est donc vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

b. On a vu (question 2.b.) que la suite (u_n) était une suite à termes strictement positifs.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Or : $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La suite $\left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Comme

$\frac{1}{2} \in]-1; +1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 0$.

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

N°115 page 45

1. Comme les deux nombres premiers qui suivent 5 sont 7 et 11, il vient immédiatement :

$$u_4 = 0,2357 \text{ et } u_4 = 0,235711$$

2. La suite (u_n) est clairement croissante (pour obtenir u_{n+1} à partir de u_n , on ajoute à ce dernier des décimales, c'est-à-dire un nombre strictement positif !). Par ailleurs, il est tout aussi clair qu'elle est majorée (par exemple par 0,3 ... ☺). On en déduit immédiatement que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est convergente.

N°117 page 45

Avant de se lancer dans quoi que ce soit (au risque, cela va de soi, de commettre ici un ... impair ☺), on peut écrire plus simplement u_1 et u_2 :

$$u_1 = \frac{1+3}{5+7} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ et } u_2 = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

Humm ... On commence probablement à avoir une petite idée sur la suite (u_n) ... Non ? Bon, on peut se lancer dans un raisonnement par récurrence. Pourquoi pas, n'hésitez pas ! Et puis, on peut également y aller « plus directement ».

On a, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{(2 \times 0 + 1) + (2 \times 1 + 1) + \dots + (2 \times n + 1)}{(2(n+1)+1) + (2(n+2)+1) + \dots + (2(2n+1)+1)} = \frac{\sum_{k=0}^n (2k+1)}{\sum_{k=n+1}^{2n+1} (2k+1)}$$

Remarquons d'abord que le numérateur et le dénominateur comportent exactement $n+1$ termes.

Pour ce qui est du numérateur, on a :

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = \sum_{k=0}^n 2k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \sum_{k=0}^n k + (n+1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2$$

Ce résultat permet de retrouver directement les numérateurs de u_1 et u_2 .

Au dénominateur, les choses sont un peu plus délicates :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n+1}^{2n+1} (2k+1) &= (2(n+1)+1) + (2(n+2)+1) + \dots + (2 \times (2n+1) + 1) \\
 &= (2n + 2 \times 1 + 1) + (2n + 2 \times 2 + 1) + \dots + (2n + 2 \times (n+1) + 1) \\
 &= 2n \times (n+1) + \sum_{k=1}^{n+1} (2k+1) \\
 &= 2n \times (n+1) + \sum_{k=1}^n (2k+1) + (2n+3) \\
 &= 2n \times (n+1) + \sum_{k=0}^n (2k+1) - 1 + (2n+3) \\
 &= 2n \times (n+1) + 2n + 2 + \sum_{k=0}^n (2k+1) \\
 &= 2n^2 + 4n + 2 + \sum_{k=0}^n (2k+1) \\
 &= 2(n+1)^2 + \sum_{k=0}^n (2k+1)
 \end{aligned}$$

En tenant compte du résultat précédent ($\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$), il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} (2k+1) = 2(n+1)^2 + \sum_{k=0}^n (2k+1) = 2(n+1)^2 + (n+1)^2 = 3(n+1)^2$$

$$\text{Finalement : } u_n = \frac{\sum_{k=0}^n (2k+1)}{\sum_{k=n+1}^{2n+1} (2k+1)} = \frac{(n+1)^2}{3(n+1)^2} = \frac{1}{3}.$$

La suite (u_n) est constante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3}$.

N°134 page 49

a. C'est bien sûr **FAUX** !

La proposition ne fait que traduire le fait que la suite (u_n) est bornée (minorée par 0 et majorée par 1). Une telle suite vérifie bien $0 \leq u_n \leq 2u_n$.

Ceci dit, il convient de proposer un contre-exemple !

Nous pouvons considérer la suite de terme général : $\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{4}$.

Lorsque n est pair, on a : $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et lorsque n est impair : $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Cette suite vérifie toutes les conditions mais ne converge pas.

b. Là encore, c'est **FAUX**.

Utilisons la suite (u_n) définie précédemment.

Si n est pair, on a : $u_n = \frac{3}{4}$ et $2u_n = \frac{3}{2}$. Dans ce cas, on peut prendre $v_n = 1$.

Si n est impair, on a : $u_n = \frac{1}{4}$ et $2u_n = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, on peut prendre $v_n = \frac{3}{8}$.

On dispose ainsi d'une suite (v_n) qui vérifie toutes les conditions mais qui ne converge pas.

c. Proposition piègeuse ... ☺

En effet, dans le cas général, c'est **FAUX** mais il y a une situation où c'est vrai (malgré tout, on conclut bien sûr au fait que la proposition est fautive puisqu'elle n'est pas toujours vraie ! ☺).

Notons L la limite de la suite (u_n) .

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2u_n = 2L$.

Si $2L = L$, c'est-à-dire si $L = 0$, alors l'inégalité $u_n \leq v_n \leq 2u_n$ entraîne (théorème d'encadrement) que la suite (v_n) converge et admet également pour limite $L = 0$.

MAIS si $L \neq 0$, alors on peut construire une suite (v_n) non convergente et vérifiant les conditions imposées.

On suppose donc $L \neq 0$.

Comme la suite (u_n) est à termes positifs, on a donc $L > 0$.

Soit alors un réel ε strictement positif tel que les intervalles $]L - \varepsilon ; L + \varepsilon[$ et $]2L - \varepsilon ; 2L + \varepsilon[$ soient disjoints.

En d'autres termes, on veut : $L - \varepsilon < L + \varepsilon < 2L - \varepsilon < 2L + \varepsilon$.

Il suffit d'avoir : $L + \varepsilon < 2L - \varepsilon$, soit $\varepsilon < \frac{L}{2}$.

On prend, par exemple : $\varepsilon = \frac{L}{4}$.

La construction de la suite (v_n) repose sur le fait suivant : à partir d'un certain rang N , les

termes de la suite (u_n) seront tous dans l'intervalle $]L - \frac{L}{4} ; L + \frac{L}{4}[=]\frac{3L}{4} ; \frac{5L}{4}[$ et ceux

de la suite $(2u_n)$ dans l'intervalle $]2L - \frac{L}{4} ; 2L + \frac{L}{4}[=]\frac{7L}{4} ; \frac{9L}{4}[$.

Il suffit donc, pour obtenir notre contre-exemple, de construire une suite (v_n) divergente telle qu'à partir du rang N tous ses termes appartiennent à l'intervalle $\left] \frac{5L}{4} ; \frac{7L}{4} \right[$.

Dans cet intervalle, il y a de la place ! ☺

Il est centré en : $\frac{1}{2} \left(\frac{5L}{4} + \frac{7L}{4} \right) = \frac{3L}{2}$ et sa longueur vaut : $\frac{7L}{4} - \frac{5L}{4} = \frac{L}{2}$.

A partir du rang N , on peut définir v_n comme suit :

- Si n est pair, on pose : $\frac{3L}{2} - \frac{L}{8} = \frac{11L}{8}$.
- Si n est impair, on pose : $\frac{3L}{2} + \frac{L}{8} = \frac{13L}{8}$.

En deçà du rang N , on choisira v_n quelconque tel que $0 \leq u_n \leq v_n \leq 2u_n$ soit vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a aura $0 \leq u_n \leq v_n \leq 2u_n$ mais la suite (v_n) ne sera pas convergente (à partir du rang N , elle oscille entre deux valeurs distinctes).

d. La proposition est **VRAIE**.

On a, pour tout entier naturel n : $u_n \leq v_n$. Le théorème de comparaison permet alors de conclure.

e. C'est, une fois encore, **FAUX** !

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la suite (u_n) définie comme suit :

- Si n est pair, $u_n = 1$.
- Si n est impair, $u_n = 1,1$.

On considère alors la suite constante (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1,5$.