
Suites

Corrigés d'exercices

Page 28 : N°23, 30, 32

Page 37 : N°123

Page 38 : N°128

Page 184 : N°28, 29, 32, 33, 34, 35, 36

Page 185 : N°38, 40, 41, 42, 43, 45

Page 186 : N°48

Page 189 : N°62, 63

Page 190 : N°67

Page 191 : N°72, 74

ATTENTION ! Ce recueil d'exercices comporte des exercices de votre livre se trouvant dans les deux chapitres : « Limites de suites et de fonctions » (chapitre 1) et « Suites et récurrence » (chapitre 7).

N°23 page 28

a) Sachant que l'on travaille avec une variable entière (donc positive), on a :

$$u_n \geq 10^6 \Leftrightarrow n^2 \geq 10^6 \Leftrightarrow n \geq 10^3$$

On a $u_n \geq 10^6$ à partir de $n = 1000$.

b) On se donne un réel A (nous le choisissons quelconque ici mais nous pourrions nous limiter à A positif).

Si A est strictement négatif, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq A$: à partir du rang 0, tous les termes de la suites sont supérieurs à A.

Si A est positif, on a : $u_n \geq A \Leftrightarrow n^2 \geq A \Leftrightarrow n \geq \sqrt{A}$.

Or, pour tout réel A positif, on a : $E(\sqrt{A}) \leq \sqrt{A} < E(\sqrt{A}) + 1$, on peut donc affirmer qu'à partir du rang $E(\sqrt{A}) + 1$, on a : $u_n > A$.

En définitive, pour toute valeur de A, on a trouvé un rang N tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$.

Par définition :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

N°30 page 28

1. On a :

$$v_n \in [1,99; 2,01] \Leftrightarrow 1,99 \leq 2 + \frac{1}{n^2} \leq 2,01 \Leftrightarrow -0,01 \leq \frac{1}{n^2} \leq 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq 0,01 \Leftrightarrow n^2 \geq 100 \Leftrightarrow n \geq 10$$

$$\boxed{v_n \in [1,99; 2,01] \Leftrightarrow n \geq 10}$$

De façon similaire :

$$v_n \in [1,999; 2,001] \Leftrightarrow 1,999 \leq 2 + \frac{1}{n^2} \leq 2,001 \Leftrightarrow -0,001 \leq \frac{1}{n^2} \leq 0,001 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq 0,001 \Leftrightarrow n^2 \geq 1000$$

Or : $\sqrt{1000} \approx 31,6$. On retient donc : $n = 32$ (i.e. le plus petit entier supérieur à 31,6 ou, si l'on préfère : $E(31,6) = 32$) :

$$\boxed{v_n \in [1,999; 2,001] \Leftrightarrow n \geq 32}$$

2. Nous nous plaçons cette fois dans le cas général en considérant un réel strictement positif ε et l'intervalle : $[2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon]$ (on aurait également pu considérer $]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$).

On a :

$$v_n \in [2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon] \Leftrightarrow 2 - \varepsilon \leq 2 + \frac{1}{n^2} \leq 2 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Comme dans le second cas ci-dessus, on considère alors l'entier : $E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1$.

On a donc : $v_n \in [2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon] \Leftrightarrow n \geq E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1$.

Ainsi, pour tout réel ε strictement positif, on a trouvé un rang N (égal à $E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1$) tel

que : $n \geq N \Rightarrow v_n \in [2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon]$. On en conclut :

La suite (v_n) converge vers 2.

N°32 page 28

Pour n pair, on a : $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n}$ et pour n impair : $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{-1}{n}$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}, 0,5 + \frac{-1}{n} \leq 0,5 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 0,5 + \frac{1}{n}$,

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0,5 + \frac{-1}{n} \leq v_n \leq 0,5 + \frac{1}{n}$$

Or, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(0,5 + \frac{-1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(0,5 + \frac{1}{n}\right) = 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0,5}$$

N°123 page 37

1. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{2 + u_0} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \theta} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \left(2 \frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \sqrt{2 + 2 \left(2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)} \\ &= \sqrt{2 + 4 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) - 2} \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Comme $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on a : $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos \frac{\theta}{2} > 0$. Il vient alors :

$$\boxed{u_1 = 2 \cos \frac{\theta}{2}}$$

On mène le calcul comme ci-dessus en remplaçant simplement θ par $\frac{\theta}{2}$ et il vient :

$$\boxed{u_2 = 2 \cos \frac{\theta}{4}}$$

2. a) Pour $n = 0$, on a : $v_0 = 2 \cos \frac{\theta}{2^0} = 2 \cos \theta$.

$$\boxed{v_0 = 2 \cos \theta}$$

b) On peut procéder comme à la question 1. Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{2+u_n} &= \sqrt{2+2 \cos \frac{\theta}{2^n}} \\ &= \sqrt{2+2 \cos \left(2 \frac{\theta}{2^{n+1}} \right)} \\ &= \sqrt{2+2 \left(2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2^{n+1}} \right) - 1 \right)} \\ &= \sqrt{2+4 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2^{n+1}} \right) - 2} \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2^{n+1}} \right)} \end{aligned}$$

On a facilement : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{\theta}{2^{n+1}} \leq \frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2}$ d'où $\cos \frac{\theta}{2^{n+1}} > 0$. Il vient alors :

$$\sqrt{2+v_n} = 2 \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} = v_{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}}$$

3. Puisque les suites u et v sont égales, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n}$.

Or, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et, de fait : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0$. Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \cos x) = 2$.

Finalement (composition) :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

N°128 page 38

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$$

Comme l'indique l'intitulé de l'exercice, une petite « astuce » est ici bien utile ...

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \times n} + \frac{1}{n \times (n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

En toute rigueur, il convient d'établir cette égalité par récurrence.

Initialisation.

Pour $n=1$, on a : $u_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

L'égalité est ainsi vérifiée au rang 1.

Hérédité.

Soit n un entier naturel non nul fixé quelconque et supposons que l'on ait : $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \times n} + \frac{1}{n \times (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2)} \\ &= \underbrace{\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \times n} + \frac{1}{n \times (n+1)}}_{= 1 - \frac{1}{n+1} \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence)}} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2)} = 1 - \frac{n+2}{(n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2)} \\ &= 1 + \frac{-n-2+1}{(n+1) \times (n+2)} = 1 + \frac{-n-1}{(n+1) \times (n+2)} = 1 - \frac{\cancel{n+1}}{(\cancel{n+1}) \times (n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Suites
Corrigés d'exercices

La propriété est ainsi vérifiée au rang $n+1$; elle est héréditaire.

L'égalité est donc vraie à n'importe quel rang non nul : $\forall n \in \mathbb{R}^*, u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on a immédiatement :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

Remarque : l'« astuce » utilisée ci-dessus n'en est pas vraiment une ... Vous apprendrez plus tard (l'an prochain ?) à décomposer les fonctions rationnelles en fonctions rationnelles plus simples facilitant ce genre de calculs. Pour cela, il existe de nombreuses techniques qui ne relèvent en rien d'astuces ...

N°28 page 184

a) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} - (n+1) \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - n \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - n + \frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - n \right) \\ &= \left(u_n + \frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right) - u_n \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} - 1}$$

b) On a facilement (démonstration par récurrence) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{4}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2^{n+1}} - 1 \leq \frac{1}{4} - 1 < 0. \text{ Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n < 0.$$

Conclusion :

La suite u est strictement décroissante.

N°29 page 184

a) Pour tout entier naturel n non nul, on a immédiatement : $n > 0$. Par ailleurs, la fonction exponentielle prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* . On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^n > 0$.

Suites
Corrigés d'exercices

Le terme v_n est donc le rapport de deux nombres strictement positifs.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n > 0}$$

b) Pour tout entier naturel n non nul, on a alors :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{e^{n+1}}{n+1}}{\frac{e^n}{n}} = \frac{e^{n+1}}{e^n} \frac{n}{n+1} = e \frac{n}{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{v_{n+1}}{v_n} = e \frac{n}{n+1}}$$

c) On montre facilement (étude de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ sur \mathbb{R}_+ ou étude du signe de $\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

On tire alors de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq \frac{e}{2} > 1$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} > v_n$$

La suite v est strictement croissante.

N°32 page 184

On peut, par exemple, exprimer la différence $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^3 - 2(n+1)^2 - (n+1) - (n^3 - 2n^2 - n) \\ &= \cancel{n^3} + 3n^2 + 3n \cancel{+ 1} - 2(n^2 + 2n + 1) \cancel{- n} \cancel{- 1} \cancel{- n^3} + 2n^2 \cancel{- n} \\ &= 3n^2 + 3n \cancel{- 2n^2} - 4n - 2 \cancel{+ 2n^2} \\ &= 3n^2 - n - 2 \\ &= 3(n-1) \left(n + \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Suites
Corrigés d'exercices

Le produit $3\left(n + \frac{2}{3}\right)$ est strictement positif pour tout entier naturel n .

On en déduit que le produit $3(n-1)\left(n + \frac{2}{3}\right)$ est du signe de $n-1$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et, plus précisément : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

On peut alors conclure :

La suite u est (strictement) croissante à partir du rang 1 (du rang 2).

N°33 page 184

La forme du terme u_n (produit) et son signe (strictement positif) nous conduisent à étudier le

rapport : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On a immédiatement :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n+1}{2(n+1)}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}} = \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

Or, pour tout entier naturel n , on a $\frac{2n+1}{2n+2} < 1$. On en déduit que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} < u_n$.

Finalement :

La suite u est strictement décroissante.

N°34 page 184

Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + \sin(n+1) - 2n - \sin n = 2 + \sin(n+1) - \sin n$$

Les sinus apparaissant dans cette expression ne peuvent valoir -1 ou 1 car leurs arguments, nombres entiers, ne peuvent valoir $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (ce qui impliquerait que π soit rationnel ...).

On peut écrire alors :

$$\begin{aligned} -1 &< \sin(n+1) < 1 \\ -1 &< -\sin n < 1 \end{aligned}$$

Suites
Corrigés d'exercices

D'où :

$$-2 < \sin(n+1) - \sin n < 2$$

Et, enfin :

$$0 < 2 + \sin(n+1) - \sin n < 4$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite u est strictement croissante.

Remarque : on aurait obtenu le même résultat en étudiant sur \mathbb{R}_+ la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = 2x + \sin x$$

N°35 page 184

On a d'abord : $u_0 = 0$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n > 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)}}{n^2 e^{-n}} = \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)}}{n^2 e^{-n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 e^{-1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

La suite de terme général $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ ($n \geq 1$) est strictement décroissante (la fonction

$x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}^*).

Or : $v_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 2^2 = 4 > e$ et $v_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25 < e$.

On a donc, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < e$, soit : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

On en déduit finalement :

La suite u est strictement décroissante à partir du rang 2.

A titre de complément :

$$u_0 = 0, u_1 = 1^2 e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,367\ 879, u_2 = 2^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,541\ 341, u_3 = 2^3 e^{-3} = \frac{8}{e^3} \approx 0,398\ 297,$$
$$u_4 = 2^4 e^{-4} = \frac{16}{e^4} \approx 0,293\ 050 \text{ et } u_5 = 2^5 e^{-5} = \frac{32}{e^5} \approx 0,215\ 614$$

(Et, en passant, pensez aux croissances comparées ... ☺)

N°35 page 184

Vérifions, dans un premier temps que la suite est bien définie.

Il suffit de montrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 0$.

Nous allons établir par récurrence que l'on a en fait : $u_n > 0$.

Initialisation :

On a : $u_0 = 5 > 0$.

Hérédité :

Soit n entier naturel. Supposons que l'on ait : $u_n > 0$.

Alors : $\sqrt{u_n + 2} > \sqrt{2}$. Soit : $u_{n+1} > \sqrt{2} > 0$.

On a donc : $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$.

Le résultat est ainsi établi.

Pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n$.

En utilisant l'expression conjuguée, il vient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{u_n + 2} - u_n)(\sqrt{u_n + 2} + u_n)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} \\ &= \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} \\ &= -\frac{(u_n + 1)(u_n - 2)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} \end{aligned}$$

On a montré que l'on avait : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. On en tire immédiatement que le rapport

$\frac{u_n + 1}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$ est strictement positif.

Il convient donc d'étudier le signe de $u_n - 2$.

Nous allons montrer par récurrence que cette expression est toujours strictement positive.

Suites
Corrigés d'exercices

Initialisation :

On a : $u_0 = 5 > 2$.

Hérédité :

Soit n entier naturel. Supposons que l'on ait : $u_n > 2$.

Alors : $\sqrt{u_n + 2} > \sqrt{2 + 2} = 2$. Soit : $u_{n+1} > 2$.

On a donc : $u_n > 2 \Rightarrow u_{n+1} > 2$.

Le résultat est ainsi établi.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{(u_n + 1)(u_n - 2)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} < 0$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$.

Conclusion :

La suite u est strictement décroissante.

Complément : la suite u est strictement décroissante et elle est minorée (par 2). Elle est donc convergente (voir les théorèmes de fin de chapitre).

Par ailleurs, la suite est définie par son premier terme et par une relation de récurrence de récurrence de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction : $x \mapsto \sqrt{x+2}$.

Cette fonction est continue. La limite l de la suite u vérifie donc : $f(l) = l$, c'est-à-dire :

$$\sqrt{l+2} = l$$

Comme la suite u est minorée par 2, sa limite est strictement positive et il vient alors :

$$\sqrt{l+2} = l \Leftrightarrow \begin{cases} l > 0 \\ l+2 = l^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l > 0 \\ l^2 - l - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l > 0 \\ (l+1)(l-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow l = 2$$

La suite u converge vers 2.

N°38 page 185

a) Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

La fonction f est la composée de la fonction $x \mapsto 1 + e^{-x}$ et de la fonction logarithme népérien.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur \mathbb{R} (et donc à fortiori sur $[0; +\infty[$) comme composée de deux fonctions dérivables sur cet intervalle ($x \mapsto -x$ et la fonction exponentielle).

La fonction $x \mapsto 1 + e^{-x}$ est donc également dérivable sur \mathbb{R} (et donc à fortiori sur $[0; +\infty[$). Pour tout x réel (et donc à fortiori pour tout x de $[0; +\infty[$), on a : $e^{-x} > 0$ et donc

Suites
Corrigés d'exercices

$1 + e^{-x} > 1 > 0$. La fonction $x \mapsto 1 + e^{-x}$ prend donc ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* . Or, la fonction logarithme népérien est dérivable sur cet intervalle.

Finalement, la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Pour tout x réel positif, on a (pour rappel : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$) : $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

Pour tout x réel (et donc à fortiori pour tout x de $[0; +\infty[$), on a : $e^{-x} > 0$ et $1 + e^{-x} > 0$. On en déduit : $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) < 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

- b) On déduit de ce qui précède que la suite u est strictement décroissante.
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0 = \ln 2$.

La suite u est majorée par $\ln 2$.

N°40 page 185

1. Montrons que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq 3$.

Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n - 2 = \frac{2n+3}{n+1} - 2 = \frac{2n+3-2n-2}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Or, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{n+1} > 0$. On en déduit : $u_n - 2 > 0$, soit : $2 < u_n$.

La suite u est minorée par 2.

Par ailleurs, pour tout entier naturel n , on a :

$$3 - u_n = 3 - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{3n+3-2n-3}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Or, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{n}{n+1} \geq 0$. On en déduit : $3 - u_n \geq 0$, soit : $u_n \leq 3$.

La suite u est majorée par 3.

La suite u est bornée par 2 et 3.

2. $v_n = \frac{u_n}{u_n + 2}$.

a) Pour tout entier naturel, on a : $v_n = \frac{u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n + 2 - 2}{u_n + 2} = \frac{u_n + 2}{u_n + 2} - \frac{2}{u_n + 2} = 1 - \frac{2}{u_n + 2}$.

On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 2}}$$

b) A la question 1., nous avons établi : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 < u_n \leq 3$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, 4 < u_n + 2 \leq 5$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{5} \leq \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{4}$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-2}{5} \geq \frac{-2}{u_n + 2} > \frac{-2}{4}$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, -0,4 \geq \frac{-2}{u_n + 2} > -0,5$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - 0,4 \geq 1 + \frac{-2}{u_n + 2} > 1 - 0,5$, soit : $\forall n \in \mathbb{N}, 0,6 \geq 1 + \frac{-2}{u_n + 2} > 0,5$.

La suite v est bornée par 0,5 et 0,6.

N°41 page 185

Montrons par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0,5 \leq u_n \leq 5$.

Soit P_n : « $0,5 \leq u_n \leq 5$ ».

Initialisation :

$u_0 = 5$. Or, $5 \in [0,5;5]$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité :

Supposons que l'on ait, pour n entier naturel quelconque : $0,5 \leq u_n \leq 5$.

Il vient alors : $-\frac{1}{2} \times 0,5 \geq -\frac{1}{2} u_n \geq -\frac{1}{2} \times 5$, c'est-à-dire : $-\frac{1}{4} \geq -\frac{1}{2} u_n \geq -\frac{5}{2}$.

Alors : $-\frac{1}{4} + 3 \geq -\frac{1}{2} u_n + 3 \geq -\frac{5}{2} + 3$, c'est-à-dire : $2,75 \geq u_{n+1} \geq 0,5$.

On a bien : $u_{n+1} \in [0,5;5]$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Le résultat est ainsi établi.

Suites
Corrigés d'exercices

N°42 page 185

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{(-1)^n n + \cos n}{1+n}.$$

On a d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}, -n \leq (-1)^n n \leq n$. Puis : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1$.

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}, -1-n \leq \cos n + (-1)^n n \leq 1+n \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{-1-n}{1+n} \leq \frac{(-1)^n n + \cos n}{1+n} \leq \frac{1+n}{1+n}.$$

$$\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \frac{(-1)^n n + \cos n}{1+n} \leq 1.$$

La suite v est donc minorée par -1 et majorée par 1 .

La suite v est bornée.

N°43 page 185

On obtient facilement (valeurs arrondies à 10^{-6}) :

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
345										
346		n	u_n							
347		1	8,500000							
348		2	5,000000							
349		3	4,166667							
350		4	4,000000							
351		5	4,100000							
352		6	4,333333							
353		7	4,642857							
354		8	5,000000							
355		9	5,388889							
356		10	5,800000							
357		11	6,227273							
358		12	6,666667							
359		13	7,115385							
360		14	7,571429							
361		15	8,033333							
362		16	8,500000							
363		17	8,970588							
364		18	9,444444							
365		19	9,921053							
366		20	10,400000							
367										

Il semblerait que les termes de la suite décroissent jusqu'à $u_4 = 4$ puis se mettent à croître strictement. La suite u ne semble pas bornée.

Suites
Corrigés d'exercices

Étudions le signe de $u_n - 4$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n - 4 = \frac{n}{2} + \frac{8}{n} - 4 = \frac{n^2 + 16 - 8n}{2n} = \frac{(n-4)^2}{2n} \geq 0$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n \geq 4$.

La suite u est minorée par 4.

On a par ailleurs, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2} + \frac{8}{n+1} - \frac{n}{2} - \frac{8}{n} = \frac{1}{2} - \frac{8}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n - 16}{2n(n+1)}$$

La racine positive de $x^2 + x - 16$ vaut : $\frac{-1 + \sqrt{65}}{2} \approx 3,53$.

On en déduit :

- Pour tout entier naturel non nul et inférieur ou égal à 3, la différence $u_{n+1} - u_n$ est négative ;
- Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 4, la différence $u_{n+1} - u_n$ est strictement positive.

La suite u est strictement croissante à partir du rang 4.

On a enfin : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n} = 0$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Finalement :

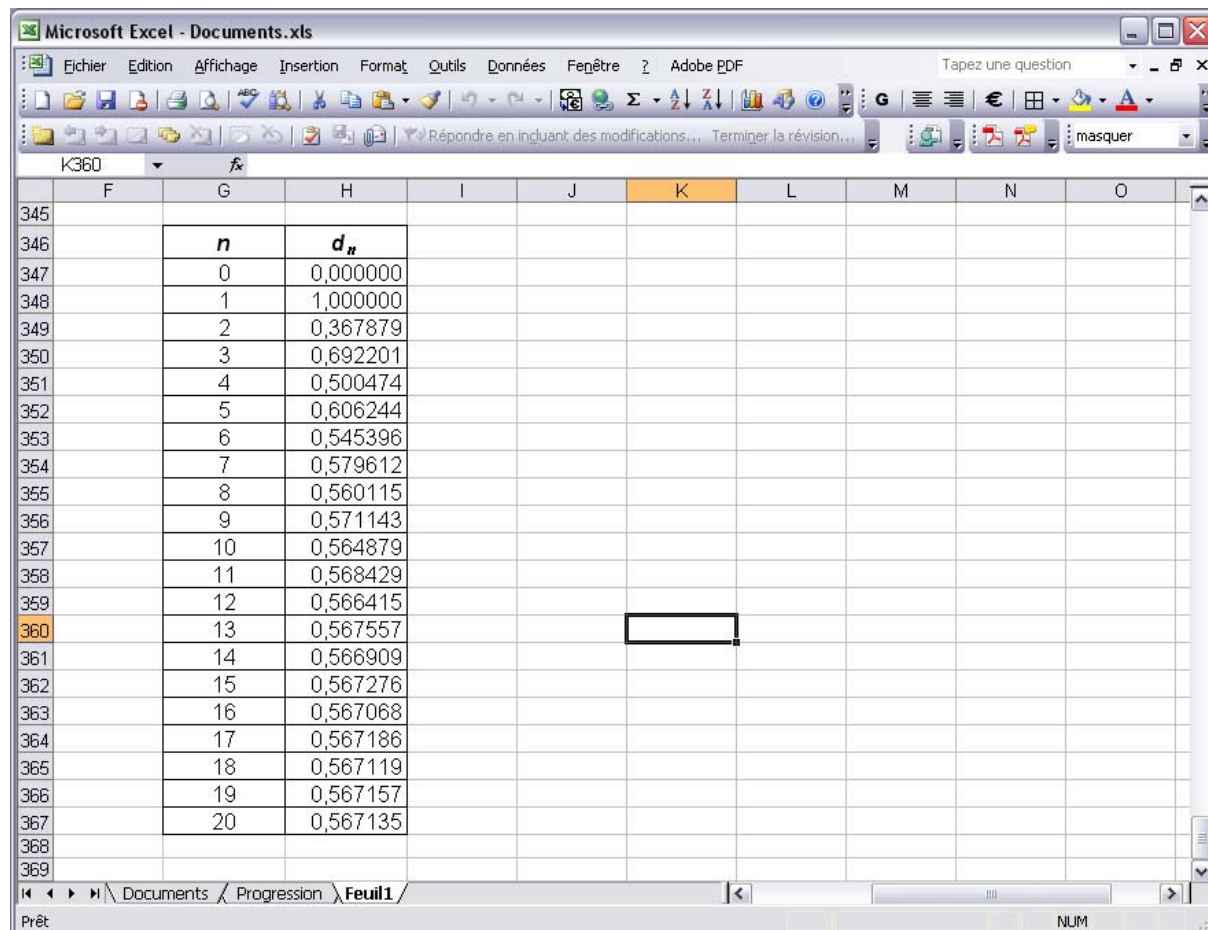
La suite u n'est pas bornée.

Suites

Corrigés d'exercices

N°45 page 185

On obtient facilement (valeurs arrondies à 10^{-6}) :



The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following data:

n	d_n
0	0,000000
1	1,000000
2	0,367879
3	0,692201
4	0,500474
5	0,606244
6	0,545396
7	0,579612
8	0,560115
9	0,571143
10	0,564879
11	0,568429
12	0,566415
13	0,567557
14	0,566909
15	0,567276
16	0,567068
17	0,567186
18	0,567119
19	0,567157
20	0,567135

Les valeurs obtenues grâce au tableur nous laissent penser que la suite d est bornée (minorée par 0 et majorée par 1) et qu'elle n'est pas monotone mais semble converger vers une valeur proche de 0,567.

Comme la fonction exponentielle prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* et que pour tout entier naturel n , on a : $d_{n+1} = e^{-d_n}$ on en déduit immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n > 0$.

Comme, par ailleurs, on a : $d_0 = 0$, il vient finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, d_n \geq 0$.

La suite u est minorée par 0.

Montrons maintenant que la suite d est majorée par 1.

Nous allons établir ce résultat par récurrence.

On a déjà : $d_0 = 0$ et $d_1 = 1$ qui sont tous deux inférieurs à 1.

Soit alors n un entier naturel quelconque. Supposons que le résultat soit vrai au rang n . C'est-à-dire : supposons que l'on ait : $d_n \leq 1$.

Suites
Corrigés d'exercices

Plus précisément, en tenant compte du résultat précédent, on a : $0 \leq d_n \leq 1$.

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur \mathbb{R} et donc, à fortiori, sur \mathbb{R}_+ , il vient : $1 \leq e^{d_n} \leq e$. D'où, en considérant les inverses : $\frac{1}{e} \leq e^{-d_n} \leq 1$. Alors : $d_{n+1} \leq 1$.

Le résultat est ainsi vrai au rang $n+1$.

Le résultat est donc vrai pour tout rang n .

La suite d est majorée par 1.

La suite étudiée est une suite récurrente définie par $d_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$d_{n+1} = f(d_n) \text{ avec } f : x \mapsto e^{-x}.$$

On montre en fait que la suite d est convergente en étudiant les suites (d_{2n}) et (d_{2n+1}) en ne retenant dans la suite d que les termes de rangs respectivement pairs et impairs (de telles suites sont appelées des « suites extraites » de la suite d). On montre que ces suites convergent vers une même limite qui, de fait, est aussi celle de d .

Comme la fonction f est continue, la limite l de la suite d vérifie $f(l) = l$.

Considérons alors la fonction φ définie sur $[0;1]$ par : $\varphi(x) = f(x) - x = e^{-x} - x$.

On montre facilement qu'elle y est continue et strictement décroissante de 1 à $\frac{1}{e} - 1$ qui est strictement négatif. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction φ s'annule une fois et une seule sur $]0;1[$ pour une valeur que nous notons α . On a donc : $\varphi(\alpha) = 0$, soit $f(\alpha) - \alpha = 0$. D'où : $\alpha = l$.

En tabulant à la calculatrice, il vient :

$$0,567\ 143 < l < 0,567\ 144$$

N°48 page 186

a) Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) + \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \\ &= \frac{1}{5}(5a_n + 5b_n) \\ &= a_n + b_n \\ &= u_n \end{aligned}$$

La suite u est donc constante et on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 = a_0 + b_0$$

b) Nous procédons de façon analogue à ce qui vient d'être fait :

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) - \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \\ &= \frac{1}{5}(a_n - b_n) \\ &= \frac{1}{5}v_n\end{aligned}$$

La suite v est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - b_0$.

On en tire immédiatement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{a_0 - b_0}{5^n}}$$

c) A partir de $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = a_n - b_n$, il vient, pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } b_n = \frac{u_n - v_n}{2}$$

Soit, en utilisant les résultats des questions a) et b) :

$$\boxed{a_n = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{1}{2} \left[(a_0 + b_0) + \frac{a_0 - b_0}{5^n} \right] \text{ et } b_n = \frac{u_n - v_n}{2} = \frac{1}{2} \left[(a_0 + b_0) - \frac{a_0 - b_0}{5^n} \right]}$$

d) Si $a_0 = b_0$, on a facilement, pour tout entier naturel n :

$$a_n = b_n = a_0 = b_0$$

Les suites a et b sont constantes et, de fait, également adjacentes.

Supposons donc maintenant : $a_0 \neq b_0$.

Pour tout entier naturel n , on a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\cancel{u_{n+1}} + v_{n+1} - \cancel{u_n} - v_n}{2} = \frac{1}{2}(a_0 - b_0) \left(\frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{5^n} \right) = \frac{1}{2}(a_0 - b_0) \frac{-4}{5^{n+1}} = -\frac{2}{5^{n+1}}(a_0 - b_0)$$

De façon similaire, on obtient :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2}{5^{n+1}}(a_0 - b_0)$$

La différence $b_{n+1} - b_n$ est du signe de $a_0 - b_0$ ($\neq 0$) tandis que la différence $a_{n+1} - a_n$ est du signe opposé. Les suite a et b sont donc strictement monotones de monotonies opposées.

Par ailleurs, la suite $v = a - b$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5} < 1$. Elle est donc convergente de limite nulle.

Ici encore, on déduit des éléments précédents que les suite a et b sont adjacentes.

Les suite a et b sont adjacentes.

N°62 page 189

$$u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

1. On a : $u_n = f(n)$ où f est la composée de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ et de la fonction

logarithme népérien.

On étudie la fonction φ sur $[1; +\infty[$.

Elle y est définie et dérivable en tant que fonction rationnelle.

Pour tout x de $[1; +\infty[$, on a : $\varphi'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$. La fonction φ est donc strictement

croissante sur $[1; +\infty[$.

Par ailleurs, la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

On en déduit finalement que la fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

D'où :

La suite u est strictement croissante.
--

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{n}{n+1} < 1$.

On en déduit immédiatement : $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) < 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 0$

2. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &= \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{n}{n+1} \\ &= \ln \left(\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \dots \times \frac{\cancel{n}}{n+1} \right) \\ &= \ln \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \ln \frac{1}{n+1}$$

En toute rigueur, il conviendrait d'établir ce résultat par récurrence.

On a immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$$

3. On pose cette fois : $T_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n}$.

On a alors, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} T_n &= u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n} \\ &= (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n}) - (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \\ &= S_{2n} - S_n = \ln \frac{1}{2n+1} - \ln \frac{1}{n+1} \\ &= \ln \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n+1}} = \ln \frac{n+1}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \ln \frac{n+1}{2n+1}$$

On a immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$. On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{n+1}{2n+1} \right) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = -\ln 2$$

N°63 page 189

$$u_0 = 1 \text{ et } \ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n).$$

1. a) Montrons par récurrence que l'on a, pour tout entier naturel n : $u_n \geq 1$.

La propriété est vraie pour $n = 0$ puisque l'on a : $u_0 = 1 \leq 1$.

Soit alors n un entier naturel quelconque et supposons que l'on ait : $u_n \geq 1$.

On en déduit alors $\ln(u_n) \geq 0$, puis : $1 + \ln(u_n) \geq 1$, soit $\ln(u_{n+1}) \geq 1$.

On en tire alors : $u_{n+1} \geq e > 1$. Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Elle est donc vraie pour tout n entier naturel.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$$

D'après le résultat précédent, la quantité $1 + \ln(u_n)$ existe toujours. On pourra ainsi toujours calculer $u_{n+1} = e^{1 + \ln(u_n)}$. La suite u est bien définie.

b) Tous les termes de la suite étant supérieurs à 1, ils sont strictement positifs et on peut donc écrire :

$$\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n) \Leftrightarrow$$

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e$$

On a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = e$$

On déduit du résultat précédent que la suite u est une suite géométrique de raison e .

c) Comme $u_0 = 1$, il vient, en utilisant le résultat précédent:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^n$$

d) La suite u est une suite géométrique à termes positifs de raison strictement supérieure à 1. On en déduit immédiatement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2. $v_n = \ln(u_n)$. Or, d'après la question 1.c), on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^n$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n$.

Il vient alors : $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. a) Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n &= \ln u_0 + \ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_n \\ &= \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n) \end{aligned}$$

On en tire : $u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = e^{v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n}$.

D'après la question précédente, on a : $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On en déduit finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

b) On a immédiatement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

On en déduit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n) = +\infty$$

N°67 page 190

$u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+u_n}$.

1. a) Montrons par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1$.

On a : $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+u_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La propriété est donc vraie au rang 1.

Supposons maintenant qu'elle soit vraie au rang n , entier naturel quelconque non nul.

Suites
Corrigés d'exercices

On a donc : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1$. On en tire alors : $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 + u_n \leq 2$ puis, tous les membres de

cette double inégalité étant positifs : $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \leq \sqrt{1 + u_n} \leq \sqrt{2}$.

Alors : $\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + u_n} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2}$, soit : $\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$.

Comme $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$, on a : $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} > 1$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Finalement : $\frac{\sqrt{2}}{2} < u_{n+1} \leq 1$.

La propriété est ainsi vérifiée au rang $n + 1$.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1$$

Montrons maintenant que la suite u est croissante.

Nous allons établir par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Pour $n = 0$, on a : $u_1 - u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

La propriété est donc vraie au rang 0.

Supposons maintenant qu'elle soit vraie au rang n , entier naturel quelconque.

On a donc : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + u_{n+1}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + u_n} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(\sqrt{1 + u_{n+1}} - \sqrt{1 + u_n})(\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n})}{\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{1 + u_{n+1}}^2 - \sqrt{1 + u_n}^2}{\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1 + u_{n+1}) - (1 + u_n)}{\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n}} \end{aligned}$$

Suites
Corrigés d'exercices

Comme $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+u_{n+1}} + \sqrt{1+u_n}}$ est strictement positif, le signe de $u_{n+2} - u_{n+1}$ est le même que celui de $u_{n+1} - u_n$. Par hypothèse, la différence $u_{n+1} - u_n$ est positive. Il en va donc de même de $u_{n+2} - u_{n+1}$.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Elle est finalement vraie pour tout entier naturel n .

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$, on en conclut :

La suite u est croissante

b) La suite u étant croissante et majorée, elle converge. Notons a sa limite.

Comme on a, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$ où la fonction f , définie par

$x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+x}$, est continue, on peut affirmer que la limite a de la suite u vérifie :

$$a = f(a) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+a}$$

Comme, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1$, il vient : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 1$.

En élevant au carré les deux membres de l'égalité ci-dessus, on obtient alors :

$$a^2 = \frac{1}{2}(1+a)$$

Soit :

$$2a^2 - a - 1 = 2(a-1)\left(a + \frac{1}{2}\right) = 0$$

La seule racine positive est 1 qui appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

Conclusion :

La suite u converge vers 1.

2. a) Soit x un réel de $[0; \pi]$.

On a classiquement : $\cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$. On en déduit : $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$.

Suites
Corrigés d'exercices

Comme x appartient à $[0; \pi]$, $\frac{x}{2}$ appartient à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On a donc $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$.

D'après l'égalité $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$, on a alors : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$.

$$\forall x \in [0; \pi], \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

b) Montrons par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Pour $n = 0$, on a : $\cos\left(\frac{\pi}{2^{0+1}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 = u_0$.

La propriété est donc vraie au rang 0.

Supposons qu'elle soit vraie au rang n , entier naturel quelconque.

On a donc : $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

On en tire alors :

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + u_n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}}$$

Pour tout n entier naturel, on a $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in [0; \pi]$ (et même $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ pour être plus précis mais c'est sans importance ici).

D'après la question précédente, on a alors :

$$\sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

La propriété est ainsi vérifiée au rang $n + 1$.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0$ (suite géométrique de premier terme $\frac{\pi}{2}$ et de raison $\frac{1}{2} \in [0; 1[$), il

vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

On retrouve bien le résultat établi plus haut :

La suite u converge vers 1.

N°72 page 191

Calculons quelques termes :

$$u_2 = \frac{1}{2-u_1} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}, \quad u_3 = \frac{1}{2-u_2} = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad u_4 = \frac{1}{2-u_3} = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Il semblerait que l'on ait : $u_n = \frac{n-1}{n}$.

Nous allons montrer ce résultat par récurrence.

L'initialisation est immédiate.

Soit alors n un entier naturel quelconque non nul et supposons que l'on ait $u_n = \frac{n-1}{n}$.

$$\text{Il vient alors : } u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{\frac{2n-n+1}{n}} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1}.$$

Le résultat est ainsi établi au rang $n+1$.

On a donc, finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n-1}{n}$$

Puisque le premier terme de la suite correspond au rang 1, le 999^{ème} correspond au rang 999.

$$\text{Il vient donc : } u_{999} = \frac{999-1}{999} = \frac{998}{999}.$$

Le 999^{ème} terme de la suite vaut $\frac{998}{999}$.

Suites

Corrigés d'exercices

N°74 page 191

On peut utiliser un tableur pour calculer les premiers termes de la suite u .

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
345										
346		n	u_n							
347		1	1,000000							
348		2	1,707107							
349		3	2,284457							
350		4	2,784457							
351		5	3,231671							
352		6	3,639919							
353		7	4,017883							
354		8	4,371437							
355		9	4,704770							
356		10	5,020998							
357		11	5,322509							
358		12	5,611184							
359		13	5,888534							
360		14	6,155796							
361		15	6,413995							
362		16	6,663995							
363		17	6,906530							
364		18	7,142232							
365		19	7,371648							
366		20	7,595255							
367		21	7,813473							
368		22	8,026674							
369		23	8,235188							
370		24	8,439312							
371		25	8,639312							
372										

La suite u est bien sûr croissante (pour tout n entier naturel non nul, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$).

Pour autant, il ne semble pas évident, à première vue, de savoir si la suite u est, ou non, majorée ...

Dans la somme $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, nous avons n termes, chacun étant supérieur ou égal au dernier $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Pour tout entier naturel n non nul, nous pouvons donc écrire :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ fois}} = n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Suites
Corrigés d'exercices

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$. On conclut alors :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

Complément : cette méthode est applicable pour toute suite u de la forme :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} + \dots + \frac{1}{n^a}$$

Où a appartient à $[0;1[$. On conclut comme ci-dessus.

En revanche, pour u définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$, l'approche ci-dessus ne « fonctionne pas » ! Mais, on a encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$... Sauriez-vous le montrer ?