Suites.

Corrigés d'exercices

Version du 20/07/2014

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

N°11 page 23

a. Pour tout entier naturel *n*, on a : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$.

On en tire alors, pour tout entier naturel *n* non nul : $-\frac{1}{n} \leq \sin(n) \leq \frac{1}{n}$.

Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont toutes deux convergentes de limite nulle.

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure :

La suite (u_n) est convergente de limite nulle.

b. Pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $v_n = \frac{n+\cos(n)}{n} = 1 + \frac{\cos(n)}{n}$.

Comme précédemment, on montre facilement que l'on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

On en déduit alors : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{\cos(n)}{n}\right] = 1+0 = 1$.

La suite (v_n) est convergente de limite égale à 1.

N°29 page 32

1. Pour tout entier naturel *n* non nul, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\mathscr{P}_n \text{ : « } 1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ »}$$

<u>Initialisation</u>

Pour $n=1$, on a : $1^3+2^3+...+n^3=1^3=1$, d'une part, et $\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{2^2}{4}=1$, d'autre part. Les deux expressions fournissent le même résultat. On en déduit que la propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie.

<u>Hérédité</u>
Soit *n* un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. On a donc : $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Intéressons-nous alors à la somme $1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3$.

On a :

$$\begin{aligned}\underbrace{1^3+2^3+...+n^3}_{\substack{=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\\ \left(\text{d'après l'hypothèse}\\ \text{de récurrence}\right)}}+(n+1)^3&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2}{4}\times\left[n^2+4(n+1)\right]\\ &=\frac{(n+1)^2}{4}\times\left(n^2+4n+4\right)=\frac{(n+1)^2}{4}\times(n+2)^2\\ &=\frac{(n+1)^2\left[(n+1)+1\right]^2}{4}\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n* non nul.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, 1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Remarque : en notant que l'on a $\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+...+n)^2$, on peut aussi écrire :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, 1^3+2^3+...+n^3=(1+2+...+n)^2$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\mathscr{P}_n : « \frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} »$$

<u>Initialisation</u>

Pour $n=1$, on a : $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{6}$, d'une part, et $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{1\times(1+3)}{4(1+1)(1+2)}=\frac{1\times\cancel{4}}{\cancel{4}\times2\times3}=\frac{1}{6}$, d'autre part. Les deux expressions fournissent le même résultat. On en déduit que la propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. On a donc :

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Intéressons-nous alors à la somme :

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}.$$

On a :

$$\underbrace{\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}}_{\substack{=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \\ \left(\text{d'après l'hypothèse} \atop \text{de récurrence}\right)}}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

$$=\frac{1}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\times\left[n(n+3)^2+4\right]$$

$$=\frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n\left(n^2+6n+9\right)+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

En remplaçant « n » par « $n+1$ » dans l'expression $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$, on obtient :

$$\frac{(n+1)\left((n+1)+3\right)}{4\left((n+1)+1\right)\left((n+1)+2\right)}=\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Or : $(n+1)^2(n+4)=\left(n^2+2n+1\right)(n+4)=n^3+6n^2+9n+4$.

On en déduit ainsi :

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\left((n+1)+3\right)}{4\left((n+1)+1\right)\left((n+1)+2\right)}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

N°30 page 32

Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$\mathscr{P}_n$: « la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie : pour tout réel x, on a $f_n'(x)=n\,x^{n-1}$. »

<u>Initialisation</u>
La fonction f_0 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0 : x\mapsto x^0=1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction constante et pour tout x réel, on a : $f_0'(x)=0$.
Par ailleurs, pour $n=0$, la fonction $x\mapsto n\,x^{n-1}$ correspond, formellement, à la fonction nulle du fait du coefficient « n ».
On déduit de ce qui précède que la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u>
Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. On suppose donc que, pour cette valeur de n, la fonction $f_n : x\mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f_n' : x\mapsto n\,x^{n-1}$.

On s'intéresse maintenant à la fonction $f_{n+1} : x \mapsto x^{n+1}$.

Pour tout x réel, on a immédiatement : $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x\, f_n(x)$.

Ainsi, la fonction f_{n+1} peut-elle être considérée comme le produit, défini sur $\mathbb{R}$, de la fonction identité et de la fonction f_n, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que la fonction f_{n+1} est également dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout *x* réel, on a alors :

$$f_{n+1}'(x) = 1 \times f_n(x) + x \times \underbrace{f_n'(x)}_{\substack{=n\,x^{n-1} \\ \left(\text{d'après l'hypothèse} \atop \text{de récurrence}\right)}} = x^n + x \times n\,x^{n-1} = (n+1)\,x^n = (n+1)\,x^{(n+1)-1}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>

La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

> Pour tout entier naturel *n*, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^n$
> est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie :
> pour tout réel *x*, on a $f_n'(x) = n\,x^{n-1}$.

N°33 page 32

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\mathscr{P}_n : \text{« } 1! + 2! + 3! + \ldots + (n-1)! \leq n! \text{ »}$$

<u>Initialisation</u>

Pour $n = 2$, on a $1! + 2! + 3! + \ldots + (n-1)! = 1! = 1$, d'une part, et $n! = 2! = 2$, d'autre part.

Comme $1 \leq 2$, on en conclut immédiatement que la propriété $\mathscr{P}_2$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2 quelconque fixé.

On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. On suppose donc que, pour cette valeur de *n*, on a :

$$1! + 2! + 3! + \ldots + (n-1)! \leq n!$$

On s'intéresse maintenant à la somme $1! + 2! + 3! + \ldots + (n-1)! + n!$.

On a :

$$\underbrace{1! + 2! + 3! + \ldots + (n-1)!}_{\substack{\leq n! \\ \left(\text{d'après l'hypothèse} \atop \text{de récurrence}\right)}} + n! \leq n! + n! = 2 \times n!$$

On a, par ailleurs : $(n+1)!-2n!=(n+1)\times n!-2n!=n!\times\left[(n+1)-2\right]=(n-1)\times n!$.
Comme $n\geq 2$, il vient $n-1\geq 1>0$ et donc $(n-1)\times n!>0$.
Ainsi : $(n+1)!-2n!>0$ et, finalement : $1!+2!+3!+...+(n-1)!+n!<(n+1)!$.

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n\geq 2$.

> Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on a :
> $$1!+2!+3!+...+(n-1)!\leq n!$$

N°35 page 32

1. On a facilement :
   $v_0=0$ (dans l'énoncé)
   $v_1=v_0+2\times 0+1=0+1=1$
   $v_2=v_1+2\times 1+1=1+3=4$
   $v_3=v_2+2\times 2+1=4+5=9$
   $v_4=v_3+2\times 3+1=9+7=16$

   0, 1, 4, 9 et 16 sont les carrés des cinq premiers entiers naturels … On peut conjecturer : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=n^2$.

2. Pour tout entier naturel *n*, on considère, d'après la question précédente, la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

   $$\mathscr{P}_n : « \ v_n=n^2 \ »$$

   Initialisation
   D'après la question précédente, $\mathscr{P}_0$ (ce qui suffit pour initialiser le raisonnement), $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ et $\mathscr{P}_4$ sont vraies.

   Hérédité
   Soit *n* un entier naturel quelconque fixé.
   On suppose que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie. C'est-à-dire : $v_n=n^2$.

   Par définition de la suite (v_n), on a : $v_{n+1}=v_n+2n+1$ d'où, en tenant compte de l'hypothèse de récurrence : $v_{n+1}=v_n+2n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$.

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$.

Conclusion
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n^2}$$

N°38 page 33

Pour tout entier naturel *n*, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\mathscr{P}_n : « \ u_n = 4\times 3^n - 1 \ »$$

Initialisation
Pour $n=0$, on a $u_n = u_0 = 3$, d'une part, et $4\times 3^n - 1 = 4\times 3^0 - 1 = 4 - 1 = 3$, d'autre part. De l'égalité on conclut immédiatement que la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité
Soit *n* un entier naturel quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. On suppose donc que, pour cette valeur de *n*, on a : $u_n = 4\times 3^n - 1$.

On s'intéresse maintenant à u_{n+1}.

Par définition de la suite (u_n), on a : $u_{n+1} = 3u_n + 2$. D'où, en tenant compte de l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = 3u_n + 2 = 3\left(4\times 3^n - 1\right) + 2 = 3\times 4\times 3^n - 3 + 2 = 4\times 3^{n+1} - 1$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = 4\times 3^n - 1$.

N°47 page 34

a. Comme $x \in \mathbb{R}_+$, on a $2x+1 \in \mathbb{R}_+^*$ et donc, en tenant compte également de $e > 0$:

$$\frac{3}{2x+1} < e \Leftrightarrow 3 < e(2x+1) \leftrightarrow 3 < 2ex + e \Leftrightarrow 3 - e < 2ex \Leftrightarrow \frac{3-e}{2e} < x$$

- Si $3-e<0$, c'est-à-dire $e>3$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2x+1} < e$ est $\mathbb{R}_+$.
- Si $3-e \geq 0$, c'est-à-dire $e \in \left]0\,;3\right]$ (n'oublions pas que le réel *e* est strictement positif) alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2x+1} < e$ est l'intervalle $\left]\frac{3-e}{2e}\,;+\infty\right[$.

b. a. On a : $u_n < e \Leftrightarrow \frac{3}{2n+1} < e$.
D'après la question précédente, il vient (on résout en fait l'inéquation dans $\mathbb{N}$ cette fois-ci) :

- Si $3-e<0$, c'est-à-dire $e>3$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2n+1} < e$ est $\mathbb{N}$.
- Si $3-e \geq 0$, c'est-à-dire $e \in \left]0\,;3\right]$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2n+1} < e$ est l'ensemble des nombres entiers naturels appartenant à l'intervalle $\left[\mathrm{E}\left(\frac{3-e}{2e}\right)+1\,;+\infty\right[$ où $\mathrm{E}\left(\frac{3-e}{2e}\right)$ désigne la partie entière du réel $\frac{3-e}{2e}$ ($\mathrm{E}\left(\frac{3-e}{2e}\right)+1$ est donc le plus petit entier naturel solution de l'inéquation $\frac{3}{2n+1} < e$).

Ainsi, pour toute valeur de *e* dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe un rang *N* tel que $n \geq N \Rightarrow u_n < e$ ($N=0$ si $e>3$ et $N = \mathrm{E}\left(\frac{3-e}{2e}\right)+1$ si $e \in \left]0\,;3\right]$).

b. Pour tout entier naturel *n*, on a $u_n > 0$. D'après la question précédente, pour tout réel strictement positif *e*, il existe un rang *N* tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n < e$, d'où $u_n \in \left]-e\,;e\right[$.
<u>Par définition</u>, on en conclut alors que la suite (u_n) converge vers 0.

N°48 page 34

$\boxed{u_n = \frac{2}{n}\ (n > 0)}$

a. On a, $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $x \mapsto f(x) = \frac{2}{x}$.

La fonction inverse étant strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, il en va de même pour la suite (u_n).

b. On conjecture, par exemple à l'aide de la calculatrice ou en utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c. On cherche un rang p tel que : $n \geq p \Rightarrow u_n \in \left]-10^{-4}\,;10^{-4}\right[$.

Les termes de la suite étant strictement positifs, on a : $u_n \in \left]-10^{-4}\,;10^{-4}\right[\Leftrightarrow u_n < 10^{-4}$.

Il vient alors :

$$u_n < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{2}{n} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{10^{-4}} \Leftrightarrow \frac{n}{2} > 10^4 \Leftrightarrow n > 2\times 10^4 = 20\,000$$

On peut donc choisir $p = 20\,001$

d. On généralise la démarche de la question précédente en remplaçant 10^{-4} par un réel e strictement positif :

$$u_n < e \Leftrightarrow \frac{2}{n} < e \Leftrightarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow n > \frac{2}{e} \Leftrightarrow n \geq \mathrm{E}\left(\frac{2}{e}\right) + 1$$

Pour tout réel strictement positif e, on pose $\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\frac{2}{e}\right) + 1$ et on a : $n \geq \mathrm{N} \Rightarrow u_n < e$.

On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite nulle.

$\boxed{u_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}}$

a. On a, $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Il en va donc de même de la fonction $x \mapsto 1+\sqrt{x}$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f, composée de ces deux fonctions, est donc elle-même strictement décroissante.

Il en va de même pour la suite (u_n).

b. On conjecture, par exemple à l'aide de la calculatrice ou en utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{n}\right)=+\infty$, que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c. On cherche un rang p tel que : $n \geq p \Rightarrow u_n \in \left]-10^{-4}\,;10^{-4}\right[$.
Les termes de la suite étant strictement positifs, on a : $u_n \in \left]-10^{-4}\,;10^{-4}\right[\Leftrightarrow u_n < 10^{-4}$.
Il vient alors :

$$u_n < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{n}} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{10^{-4}} < 1+\sqrt{n} \Leftrightarrow 10^4 - 1 < \sqrt{n}$$

Les deux membres de la dernière inégalité étant positifs, on a :

$$10^4 - 1 < \sqrt{n} \Leftrightarrow \left(10^4 - 1\right)^2 < n$$

On peut donc choisir $p = \left(10^4 - 1\right)^2 + 1 = 99\,980\,002$.

d. Ici encore, on généralise la démarche de la question précédente en remplaçant 10^{-4} par un réel e strictement positif :

$$u_n < e \Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{n}} < e \Leftrightarrow \frac{1}{e} < 1+\sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{e} - 1 < \sqrt{n}$$

En toute rigueur, on doit distinguer deux cas :

- Si $e > 1$ alors $\frac{1}{e} - 1 < 0$ et l'inégalité $\frac{1}{e} - 1 < \sqrt{n}$ est vérifiée pour toute valeur de n.
- Si $e \leq 1$ alors $\frac{1}{e} - 1 \geq 0$ et on a : $\frac{1}{e} - 1 < \sqrt{n} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{e} - 1\right)^2 < n$. On peut alors considérer $\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\left(\frac{1}{e} - 1\right)^2\right) + 1$.

Dans tous les cas, on peut trouver une valeur N telle que : $n \geq \mathrm{N} \Rightarrow u_n < e$.
On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite nulle.

N°54 page 34

Nous allons établir le résultat en utilisant la définition. Il convient donc de montrer que pour tout réel A, il existe un rang N à partir duquel on a $u_n < \mathrm{A}$.
Soit donc A un réel.
On a : $-2n^2 + 3 < \mathrm{A} \Leftrightarrow 2n^2 > 3 - \mathrm{A} \Leftrightarrow n^2 > \frac{3-\mathrm{A}}{2}$.

On distingue donc deux situations :

- Si $A > 3$ alors $\frac{3-A}{2} < 0$ et l'inégalité $n^2 > \frac{3-A}{2}$ est vérifiée pour tout entier naturel *n*. Il suffit alors de choisir $N = 0$ par exemple.
- Si $A \leq 3$ alors $\frac{3-A}{2} \geq 0$ et on a : $n^2 > \frac{3-A}{2} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{3-A}{2}}$.

  Il suffit alors de considérer : $N = E\left(\sqrt{\frac{3-A}{2}}\right) + 1$.

Dans tous les cas, pour un A réel quelconque fixé, on peut trouver une valeur N telle que : $n \geq N \Rightarrow u_n < A$.
On en déduit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$.

N°57 page 34

a. On a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{produit}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

b. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, nous avons affaire à une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».
Pour tout entier naturel *n*, on a : $n^3 - n^2 = n^2(n-1)$.
On a alors :

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (-1) = -1\end{array}\right\} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{produit}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} n^2(n-1) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$$

N°58 page 34

1. On a :

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2=2\end{array}\right\}\overset{\text{produit}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty} 2n=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1=1\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n+1\right)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 3=3\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n+1\right)=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{rapport}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2n+1}=0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=0}$$

2. On a, en procédant de façon similaire :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2\right)=-2\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1=1\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+1\right)=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{rapport}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{n+1}=0$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 5=5\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{n+1}=0\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\frac{-2}{n+1}\right)=5$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n=5}$$

N°64 page 34

1. Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n=\frac{(n+1)(3-n)}{2n^2+1}=\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)\times n\left(\frac{3}{n}-1\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3}{n}-1\right)}{2+\frac{1}{n^2}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, il vient (somme) :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}-1\right)=-1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$$

Et enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{3}{n}-1\right)}{2+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1\times(-1)}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{2}}$$

2. On procède de façon similaire. Pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = \left(n-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{2n^2}\right) = n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\times\frac{1}{2n^2}\times n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, il vient (somme) :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

Et enfin (produit) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}}$$

N°74 page 36

1. Comme, pour tout entier naturel n, on a : $-1 \le (-1)^n \le 1$, il vient : $\dfrac{-1}{n+1} \le u_n \le \dfrac{1}{n+1}$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

   Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que la suite (u_n) est convergente et que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

2. On procède de façon similaire à ce qui vient d'être fait.

   Comme, pour tout entier naturel n, on a : $-1 \le \cos(n) \le 1$, il vient : $\dfrac{-1}{n^2} \le v_n \le \dfrac{1}{n^2}$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que la suite (v_n) est convergente et que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

$$\boxed{(v_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} v_n = 0.}$$

N°77 page 36

1. A la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{\begin{gathered} u_{10} \simeq 1{,}996\,357 \\ u_{100} \simeq 1{,}999\,952 \end{gathered}}$$

Il semble que la suite (u_n) converge vers 2.

2. Pour tout n entier naturel, on a : $-1 \le \sin n \le 1$.
On en déduit : $-3 \le -3\sin n \le 3$ puis : $2n^2 - 3 \le 2n^2 - 3\sin n \le 2n^2 + 3$ et, enfin :

$$\frac{2n^2-3}{n^2+1} \le \frac{2n^2-3\sin n}{n^2+1} \le \frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

C'est-à-dire : $\dfrac{2n^2-3}{n^2+1} \le u_n \le \dfrac{2n^2+3}{n^2+1}$.
Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2n^2-3}{n^2+1} \le u_n \le \frac{2n^2+3}{n^2+1}}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{2n^2-3}{n^2+1} = \frac{n^2\left(2-\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{2-\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}} \text{ et } \frac{2n^2+3}{n^2+1} = \frac{n^2\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0$, il vient (somme) :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right) = 2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$$

On en déduit finalement (rapport) :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2-3}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2-\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2}{1}=2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+3}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2}{1}=2$$

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que la suite (u_n) est convergente de limite égale à 2.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=2}$$

3. a. A la question 2, nous avons obtenu, pour tout entier naturel n :

$$\frac{2n^2-3}{n^2+1}\le u_n\le\frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

On en déduit immédiatement : $\dfrac{2n^2-3}{n^2+1}-2\le u_n-2\le\dfrac{2n^2+3}{n^2+1}-2$.

Soit : $\dfrac{2n^2-3-2\left(n^2+1\right)}{n^2+1}\le u_n-2\le\dfrac{2n^2+3-2\left(n^2+1\right)}{n^2+1}$.

Soit encore : $\dfrac{-5}{n^2+1}\le u_n-2\le\dfrac{1}{n^2+1}$.

On a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{-5}{n^2+1}\le u_n-2\le\frac{1}{n^2+1}}$$

b. Comme : $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{1}{n^2+1}\le\dfrac{5}{n^2+1}$, l'inégalité obtenue à la question précédente entraîne :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{-5}{n^2+1}\le u_n-2\le\frac{5}{n^2+1}$$

Soit : $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|u_n-2\right|\le\dfrac{5}{n^2+1}$.

Ainsi, si, à partir d'un certain rang N, on a l'inégalité : $\dfrac{5}{n^2+1}<10^{-3}$ alors, on aura également l'inégalité $\left|u_n-2\right|<10^{-3}$. En d'autres termes, la distance entre u_n et 2 sera inférieure à 10^{-3}.

On a :

$$\frac{5}{n^2+1}<10^{-3} \Leftrightarrow \frac{n^2+1}{5}>10^3 \Leftrightarrow n^2+1>5\,000 \Leftrightarrow n^2>4\,999 \Leftrightarrow n>\sqrt{4\,999}$$

Or : $\sqrt{4\,999}\simeq 70,7$. Ainsi, pour $n\geq 71$, on aura $\frac{5}{n^2+1}<10^{-3}$ et donc $|u_n-2|<10^{-3}$.

A partir du rang $N=71$, on est certain que la distance entre u_n et 2 est inférieure à 10^{-3}.

c. On a $u_n=\frac{2n^2-3\sin n}{n^2+1}=\frac{2\left(n^2+1\right)-2-3\sin n}{n^2+1}=2-\frac{2+3\sin n}{n^2+1}$.

Si $2+3\sin n<0$, c'est-à-dire $\sin n<-\frac{2}{3}$ alors on aura $u_n>2$.

En l'occurrence $\sin 74\simeq -0,985<-\frac{2}{3}$ et $u_{74}\simeq 2,000\,174$.

Pour tout entier $n\geq 71$, on n'a pas nécessairement $u_n\leq 2$.

N°82 page 37

1. L'objectif de cette question est d'établir la croissance de la suite *u*.
   On a immédiatement :

$$\begin{aligned}
&\forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1}=u_n^2+3u_n+1\\
\Leftrightarrow\ &\forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1}-u_n=u_n^2+3u_n+1-u_n\\
\Leftrightarrow\ &\forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1}-u_n=u_n^2+2u_n+1\\
\Leftrightarrow\ &\forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1}-u_n=\left(u_n+1\right)^2
\end{aligned}$$

   Comme on a : $\forall n\in\mathbb{N},\left(u_n+1\right)^2\geq 0$, la relation de récurrence définissant la suite *u* entraîne donc sa croissance et ce, quelle que soit la valeur de u_0. Il n'est donc pas utile de montrer que l'on a $u_n\geq 0$ pour tout entier naturel *n* (une récurrence simple permet d'établir ce résultat) qui s'avère une conséquence immédiate de cette croissance et du fait que u_0 est égal à 0.

La suite *u* est croissante.

2. On suppose que la suite u est majorée.
   Dès lors, étant croissante et majorée, la suite *u* est convergente. Notons *L* sa limite.

A la question précédente, on a montré que l'on avait : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)^2$.

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = L - L = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + 1)^2 = (L+1)^2$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)^2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + 1)^2$, il vient donc $0 = (L+1)^2$ soit, finalement : $L = -1$.

Si la suite u est majorée alors on a nécessairement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

3. Le résultat précédent est absurde puisque l'on a, d'après la question 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. Il en résulte alors que la limite L de la suite u est nécessairement positive. Ainsi, la limite L ne peut être égale à -1.
Aboutissant à une contradiction, on en tire que la suite u n'est pas majorée.
Etant croissante, elle tend donc vers $+\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

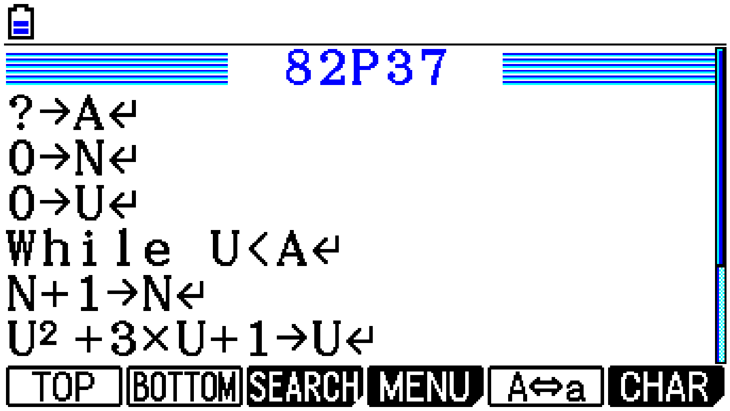
4. a. Nous proposons l'algorithme suivant, écrit en langage pseudo-naturel :

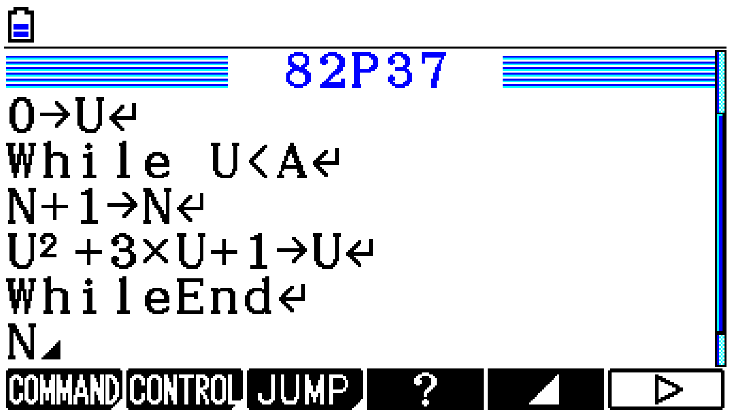
```
Variable :    N entier
              U réel
              A réel

Début :
              N ← 0
              U ← 0
              Lire A
              TantQue  U < A
                     Faire   N ← N+1
                             U ← U² + 3U + 1
              FinTantQue
              Afficher N
Fin
```

b. Pour $\mathrm{A} = 1\,000$, on obtient : $\mathrm{N} = 4$.
Pour vérifier : $u_3 = 41$ et $u_4 = 1\,805$
Pour $\mathrm{A} = 10^6$, on obtient : $\mathrm{N} = 5$.
Pour vérifier : $u_4 = 1\,805$ et $u_5 = 3\,263\,441$

Sur ma CASIO, j'ai écrit le programme suivant :





N°84 page 37

1. Comme $\frac{2}{3} \in \left]-1\,;+1\right[$, on a immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

   Il vient alors (différence) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 1-0 = 1$ puis (rapport) :

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \dfrac{2}{1} = 2$.

   Enfin (différence) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{2}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right) = 1-2 = -1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -1}$$

2. Comme 6 et 7 sont deux réels strictement supérieurs à 1, on a immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty} 6^n = \lim_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$$

Pour (v_n), nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».
Comme $7>6$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}, 7^n > 6^n$. On va donc factoriser par 7^n :

$$\forall n\in\mathbb{N}, v_n = 6^n - 7^n = 7^n\left(\frac{6^n}{7^n}-1\right) = 7^n\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n - 1\right)$$

Comme $0<6<7$, il vient $\frac{6}{7}\in\left]-1\,;+1\right[$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$.

On en déduit (somme) : $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n - 1\right) = -1$ puis (produit) : $\lim_{n\to+\infty} 7^n\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n - 1\right) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty}$$

N°89 page 37

1. On a, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k} &= \frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^{n+1}}\\ &= \frac{1}{10^2}\left(1+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{1}{100}\times\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\\ &= \frac{1-\frac{1}{10^n}}{100-\frac{100}{10}} = \frac{1-\frac{1}{10^n}}{90}\\ &= \frac{1}{90}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$v_n = 1,2\underbrace{77....7}_{\substack{n \text{ fois le} \\ \text{chiffre "7"}}} = 1,2 + 0,07 + 0,007 + ... + 0,\underbrace{00...0}_{\substack{n \text{ fois le} \\ \text{chiffre "0"}}}7 = 1,2 + 7\times\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k}$$

En tenant compte de la question 1, il vient alors :

$$v_n = 1,2 + 7\times\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k} = 1,2 + 7\times\frac{1}{90}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = 1,2 + \frac{7}{90}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

Comme $\frac{1}{10^n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ et comme $\frac{1}{10} \in \left]-1\,;+1\right[$, il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{10^n} = 0$.

On en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = 1-0 = 1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{7}{90}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right] = \frac{7}{90}$ et enfin :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1,2 + \frac{7}{90}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right] = 1,2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{108+7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$$

La limite de la suite v est le nombre rationnel $r = \frac{23}{18}$.

N°95 page 40

Partie A – Question de cours

Soit A un réel.
Comme la suite (u_n) tend vers $+\infty$, il existe un rang N tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n > A$.
Mais comme, pour tout entier naturel n, $v_n \geq u_n$, il vient : $n \geq N \Rightarrow v_n > A$.
On en déduit ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Le résultat est établi.

Partie B

1. On a :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3}\times 1 - 2 = \boxed{-\frac{5}{3}}$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3}\times\left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = -\frac{5}{9} - 1 = \boxed{-\frac{14}{9}}$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = \frac{1}{3}\times\left(-\frac{14}{9}\right) = \boxed{-\frac{14}{27}}$$

2. a. Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 4, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\mathscr{P}_n \text{ : « } u_n \geq 0 \text{ »}$$

Initialisation

Pour $n = 4$, on a : $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{27}\right) + 1 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81} > 0$.
La propriété $\mathscr{P}_4$ est donc vraie.

Hérédité

Soit *n* un entier naturel quelconque fixé supérieur ou égal à 4.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire $u_n \geq 0$
Comme $n \geq 4$ alors on a : $n - 2 \geq 2 > 0$.
Comme $u_n \geq 0$ alors on a : $\frac{1}{3}u_n \geq 0$.
On en déduit alors $\frac{1}{3}u_n + n - 2 > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$. La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion

Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 4, $u_n \geq 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow u_n \geq 0}$$

b. Pour tout entier $n \geq 5$, on a : $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 2 = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3$.
Mais $n \geq 5 \Leftrightarrow n - 1 \geq 4$. D'après le résultat de la question précédente, on a donc : $u_{n-1} \geq 0$.
D'où $\frac{1}{3}u_{n-1} \geq 0$ puis $\frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geq n - 3$ c'est-à-dire $u_n \geq n - 3$.
Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \Rightarrow u_n \geq n - 3}$$

c. On a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \Rightarrow u_n \geq n - 3$. Comme $\lim_{n \to +\infty} (n - 3) = +\infty$, le théorème de comparaison nous permet alors de conclure immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

3. a. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3(n+1) - \frac{21}{2} \\ &= -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Par ailleurs : $v_0 = -2u_0 + 3\times 0 - \frac{21}{2} = -2 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est la suite géométrique de premier terme } v_0 = -\frac{25}{2} \text{ et de raison } \frac{1}{3}.}$$

b. D'après le résultat précédent, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -\frac{25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_n = -v_n + 3n - \frac{21}{2}$, soit $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2}\left(-v_n + 3n - \frac{21}{2}\right)$. Il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2}\left(-v_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(-\frac{25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{25}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{25}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}}$$

c. On a : $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right) = +\infty$.

Par ailleurs, comme $\frac{1}{3} \in]-1\,;+1[$, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et donc : $\lim_{n\to+\infty}\frac{25}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

On en déduit alors (somme) : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{25}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right) = +\infty$ soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

On a ainsi retrouvé la limite de la suite (u_n) obtenue à la question 2.c.

4. Rappelons que l'on a (question 3.b.) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

On en tire, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}k - \frac{21}{4} \right) \\ &= \frac{25}{4} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{n} k - \frac{21}{4} \sum_{k=0}^{n} 1 \end{aligned}$$

On a immédiatement :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

Or : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{25}{4} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{n} k - \frac{21}{4} \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \frac{25}{4} \times \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) \\ &= \frac{75}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3n(n+1)}{4} - \frac{21(n+1)}{4} \\ &= \frac{75}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3}{4}(n-7)(n+1) \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{3} \in \left]-1\,;+1\right[$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{75}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{75}{8} \times (1-0) = \frac{75}{8}$

.

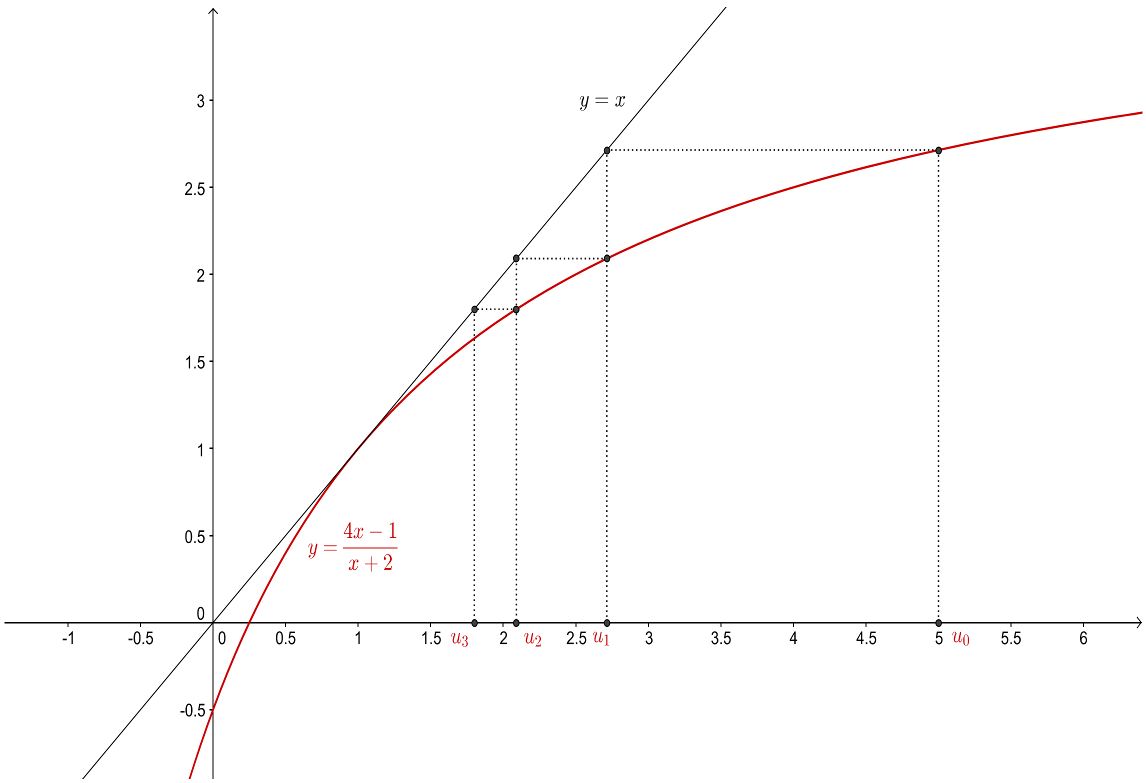
Par ailleurs : $\lim_{n\to+\infty} (n+1) = \lim_{n\to+\infty} (n-7) = +\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4}(n-7)(n+1) = +\infty$.

Ainsi, on a finalement (somme) : $\lim_{n\to+\infty} \left\{ \frac{75}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3}{4}(n-7)(n+1) \right\} = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$$

N°96 page 40

1. a. On obtient facilement :



b. D'après le graphique obtenu précédemment, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 1 (abscisse et ordonnée du point d'intersection de la courbe représentative de la fonction f et de la 1ère bissectrice).

2. a. Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$: « $u_n \geq 1$ ».

<u>Initialisation.</u>

On a $u_0 = 5 \geq 1$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité.</u>

Soit n un entier naturel quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire $u_n \geq 1$, et on veut montrer $u_{n+1} \geq 1$.
On a : $u_{n+1} - 1 = f(u_n) - 1 = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{4u_n - 1 - (u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$.

Comme $u_n \geq 1$, il vient immédiatement $u_n + 2 > 0$ et donc $\frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2} \geq 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 1$.

La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

<u>Conclusion.</u>

Initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout *n* entier naturel :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1}$$

b. Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = -\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n + 2} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$$

On a évidemment $(u_n - 1)^2 \geq 0$. Par ailleurs, comme on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$, il vient $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 2 \geq 3 > 0$. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2} \leq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

c. La suite (u_n) étant décroissante et minorée (par 1), elle est convergente.

Notons *L* sa limite.

Pour tout n entier naturel, on a : $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

On a immédiatement : $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n = L$.

Par ailleurs grâce aux résultats sur les limites et opérations, il vient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{4L - 1}{L + 2}$$

D'où : $\frac{4L - 1}{L + 2} = L$. D'où, en utilisant le calcul de la question ci-dessus : $-\frac{(L - 1)^2}{L + 2} = 0$.

On en tire immédiatement : $L = 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente de limite égale à 1.}}$$

3. a. Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{3(u_n-1)}{u_n+2}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+2}{3(u_n-1)}-\frac{1}{u_n-1}$$
$$=\frac{u_n+2}{3(u_n-1)}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+2}{3(u_n-1)}-\frac{3}{3(u_n-1)}=\frac{u_n-1}{3(u_n-1)}$$
$$=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } \frac{1}{3}.}$$

b. Comme $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{5-1}=\frac{1}{4}$, il vient immédiatement : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{1}{4}+n\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{n}{3}$.

A partir de $v_n=\frac{1}{u_n-1}$, on obtient facilement $u_n=\frac{1}{v_n}+1$. D'où :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{v_n}+1=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{n}{3}}+1=\frac{1}{\frac{4n+3}{12}}+1=\frac{12}{4n+3}+1=\frac{4n+15}{4n+3}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{1}{4}+\frac{n}{3} \text{ et } u_n=\frac{4n+15}{4n+3}}$$

c. Plutôt qu'utiliser l'expression de u_n en fonction de n (nous vous laissons le soin de développer cette approche), nous allons travailler à partir de la relation $u_n=\frac{1}{v_n}+1$.

Comme on a $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{1}{4}+\frac{n}{3}$, il vient immédiatement : $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$. D'où $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n}=0$ puis $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_n}+1\right)=1$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$. On a ainsi retrouvé le résultat de la question 2.c.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente de limite égale à 1.}}$$

N°98 page 41

Partie A

1. P_1 est **fausse** car pour $n=1$, on a : $4^n=4^1=4$ mais $4n+1=4\times1+1=5>4$.
   P_2 est **fausse** car pour $n=2$, on a $4^n=4^2=16$ mais $4n+1=4\times2+1=9<16$.
   P_3 est **vraie** car l'inégalité $4^n\leq 4n+1$ est vérifiée pour $n=1$.
   P_4 est **fausse** car l'inégalité $4^n\leq 4n+1$ est vérifiée pour $n=0$ $(1\leq1)$ et $n=1$.

2. La négation de « Pour tout entier *n*, $4^n>4n+1$ » est « il existe un entier *n* tel que $4^n\leq 4n+1$ ». Il s'agit donc de la proposition P_3.

Partie B

1. a. $4(p+1)+1-4(4p+1)=4p+\cancel{4}+1-16p-\cancel{4}=-12p+1$

   b. Pour tout entier $p\geq1$, on a : $-12p\leq-12$ d'où $-12p+1\leq-11<0$.
   En reprenant le résultat de la question a. on a donc :

   $$4(p+1)+1-4(4p+1)=-12p+1<0$$

   D'où : $4(p+1)+1<4(4p+1)$. Le résultat est ainsi établi.

2. En testant quelques valeurs faibles de *n* (ou en réfléchissant à la croissance de 4^n et à celle de $4n+1$ … ☺), on peut conjecturer que l'inégalité est vérifiée pour $n\geq2$.
   Démontrons cette conjecture par récurrence.

   On considère donc, pour tout *n* entier supérieur ou égal à 2, la propriété :

   $$\mathscr{P}_n : « 4^n>4n+1 »$$

   <u>Initialisation</u>

   Pour $n=2$, on a : $4^n=4^2=16$ et $4n+1=4\times2+1=9$. On a $16>9$.
   La propriété $\mathscr{P}_2$ est donc vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel quelconque fixé supérieur ou égal à 2.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire $4^n > 4n+1$.
On s'intéresse à $\mathscr{P}_{n+1}$. On va donc comparer 4^{n+1} et $4(n+1)+1$.

Comme $4^n > 4n+1$ (hypothèse de récurrence), on a : $4\times 4^n > 4\times(4n+1)$, c'est-à-dire $4^{n+1} > 4\times(4n+1)$.
Comme n est supérieur ou égal à 2, on peut utiliser le résultat de la question 1.b : on a donc $4\times(4n+1) > 4\times(n+1)+1$.
Finalement : $4^{n+1} > 4\times(4n+1) > 4\times(n+1)+1$.
La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion

La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 2 \Rightarrow 4^n > 4n+1}$$

N°103 page 42

Partie A

1. Une suite (u_n) n'est pas majorée si, pour tout réel M, on peut trouver un rang N (ce rang dépend donc A PRIORI du réel M), tel que $u_N \geq M$.

2. a. La suite étant croissante, on a : $n \geq n_0 \Leftrightarrow u_n \geq u_{n_0}$.
   Comme $u_{n_0} > M$, on en déduit immédiatement $u_n > M$.
   Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n > M$.

   b. D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que pour tout réel M, il existe un certain rang n_0 tel que a partir de ce rang tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]M\ ;+\infty[$. Ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. On vient d'établir le résultat fondamental :

$$\boxed{\text{Pour toute suite } (u_n) \text{ croissante et non majorée, on a : } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Partie B

1. Récurrence immédiate (pour l'hérédité, si on suppose $u_n \geq 1$, on a $u_n > 0$ et donc $\frac{1}{u_n} > 0$.

   On en déduit $u_n + \frac{1}{u_n} > 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$, à fortiori $u_{n+1} \geq 1$).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1}$$

2. A la question précédente, on a établi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

   On en déduit immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

3. a. La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge.}}$$

   b. On a, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

   La suite (u_n) étant convergente, il en va de même pour les suites (u_{n+1}) et $\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$ et il vient, d'après l'égalité ci-dessus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$$

   La limite de la suite (u_n) est bien solution de l'équation $x = x + \frac{1}{x}$.

$$\boxed{\text{La limite de la suite } (u_n) \text{ est solution de l'équation } x = x + \frac{1}{x}.}$$

4. On a $x = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0$ qui n'admet pas de solution. L'hypothèse « (u_n) majorée » conduit donc à une contradiction. On en déduit que la suite (u_n) n'est pas majorée.

Comme la suite (u_n) est croissante, on en déduit (cf. la partie A) qu'elle tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

N°104 page 43

1. Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n\right) - u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = -\frac{2}{3}v_n$$

On en déduit immédiatement que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$.

Par ailleurs, on a : $v_0 = u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$.

Finalement :

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

2. Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$w_{n+1} = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} = \left(\frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n\right) + \frac{2}{3}u_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = w_n$$

On en déduit que la suite (w_n) est constante.

La suite (w_n) est constante.

3. On a : $w_1 = u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 1 + \frac{2}{3}\times 0 = 1$.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 1.}$$

4. D'après la première question, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

On a aussi : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = 1 = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

On en déduit :

$$u_{n+1} = u_n + v_n = u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \text{ et } 1 = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{3}u_n$$

Finalement : $u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

Comme $-\frac{2}{3} \in \left]-1\,;+1\right[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et on en tire enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\times 0 = \frac{3}{5}$.

La suite (u_n) converge et admet pour limite $\frac{3}{5}$.

N°109 page 43

1. On pose $\mathscr{P}_n$: « $\frac{k^n}{n!} \le \frac{k^k}{k!}$ ».

   Initialisation.

   Pour $n = k$, on a $\frac{k^n}{n!} = \frac{k^k}{k!}$ et l'inégalité (qui, dans ce cas, est une égalité) est trivialement vérifiée.

   Hérédité.

   Soit n un entier naturel supérieur ou égal à k fixé. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie.
   On a donc : $\frac{k^n}{n!} \le \frac{k^k}{k!}$.
   On a $n+1 > n \ge k$. Donc : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \le \frac{1}{k}$ et donc : $\frac{k}{n+1} < \frac{k}{n} \le \frac{k}{k} = 1$. D'où : $\frac{k}{n+1} < 1$.
   Il vient alors : $\frac{k}{n+1} \times \frac{k^n}{n!} < 1 \times \frac{k^n}{n!}$, c'est-à-dire $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{k^n}{n!}$.
   Comme $\frac{k^n}{n!} \le \frac{k^k}{k!}$, on en déduit finalement : $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{k^k}{k!}$.
   La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

   Conclusion.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge k \Rightarrow \frac{k^n}{n!} \le \frac{k^k}{k!}$

2. A la question précédente, on a établi que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on avait : $\dfrac{k^n}{n!} \leq \dfrac{k^k}{k!}$. Soit : $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{k^n} \times \dfrac{k^k}{k!}$.
   Pour tout réel x positif et tout entier naturel n, on a : $x^n \geq 0$.
   D'où : $\dfrac{x^n}{n!} \leq \dfrac{x^n}{k^n} \times \dfrac{k^k}{k!} = \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k!}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } k : \dfrac{x^n}{n!} \leq \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k!}.}$$

3. Comme $0 \leq x < k$, on a : $0 \leq \dfrac{x}{k} < 1$ et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{x}{k}\right)^n = 0$ puis, l'entier k étant fixé :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}\right] = 0$$

   Comme $0 \leq \dfrac{x^n}{n!} \leq \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k!}$, il vient enfin, grâce au théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0}$$

N°110 page 44

1. On a facilement :

$$u_1 = \frac{1!}{1^1} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

$$u_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$u_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{6}{27} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

$$u_5 = \frac{5!}{5^5} = \frac{120}{3125} = \boxed{\frac{24}{625}}$$

$$u_{10} = \frac{10!}{10^{10}} = \frac{3\,628\,800}{10\,000\,000\,000} = \boxed{\frac{567}{1\,562\,500}}$$

Il semble que la suite (u_n) soit décroissante.

2. a. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

$$= \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \times \cancel{n!}} \times \frac{\cancel{(n+1)} \times (n+1)^n}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Or, pour tout entier naturel n et tout réel $x \geq -1$ (attention à l'erreur dans l'énoncé !!!), on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$. En prenant $x = \frac{1}{n}$, il vient : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\times\frac{1}{n} = 2$. Le résultat est ainsi établi.

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$.

b. Pour tout n entier naturel non nul, on a : $n! > 0$ et $n^n > 0$. On en déduit : $u_n > 0$.
D'après la question précédente, il vient alors :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2 \Leftrightarrow 2u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

La suite (u_n) est strictement décroissante.

3. a. On veut montrer : pour tout entier naturel non nul, $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Varions les plaisirs en ne suivant pas l'indication du livre mais en procédant … par récurrence ! ☺

Nous posons donc : $\mathscr{P}_n$: « $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ».

<u>Initialisation</u>

Pour $n=1$, on a : $u_1 = 1$ et $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = 1$.

On a bien $u_1 \leq \frac{1}{2^{1-1}}$: la propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie.

Hérédité
Soit N un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose $\mathscr{P}_N$ vraie, c'est-à-dire : $u_N \leq \frac{1}{2^{N-1}}$.

On veut montrer que $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie, soit : $u_{N+1} \leq \frac{1}{2^{(N+1)-1}} = \frac{1}{2^N}$.

D'après la question 2.a. on a : $u_{N+1} \leq \frac{1}{2} u_N$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $u_N \leq \frac{1}{2^{N-1}}$. D'où : $\frac{1}{2} u_N \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{N-1}} = \frac{1}{2^N}$.

Finalement : $u_{N+1} \leq \frac{1}{2} u_N \leq \frac{1}{2^N}$. Le résultat est établi.

La propriété $\mathscr{P}_{N+1}$ est donc vraie.

Conclusion
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n* non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

b. On a vu (question 2.b.) que la suite (u_n) était une suite à termes strictement positifs.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Or : $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La suite $\left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} \in]-1\,;+1[$, on a : $\lim_{n \to +\infty} \left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 0$.

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure immédiatement : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

N°112 page 44

1. Par construction, un triangle isocèle divisé donne 4 nouveaux triangles isocèles dont un seul, le triangle central, est numéroté, *n* par exemple. Alors, les trois autres triangles donneront trois nouveaux triangles numérotés $n+1$. A chaque itération, le nombre de triangles numérotés est donc multiplié par 3 : $m_{n+1} = 3m_n$.

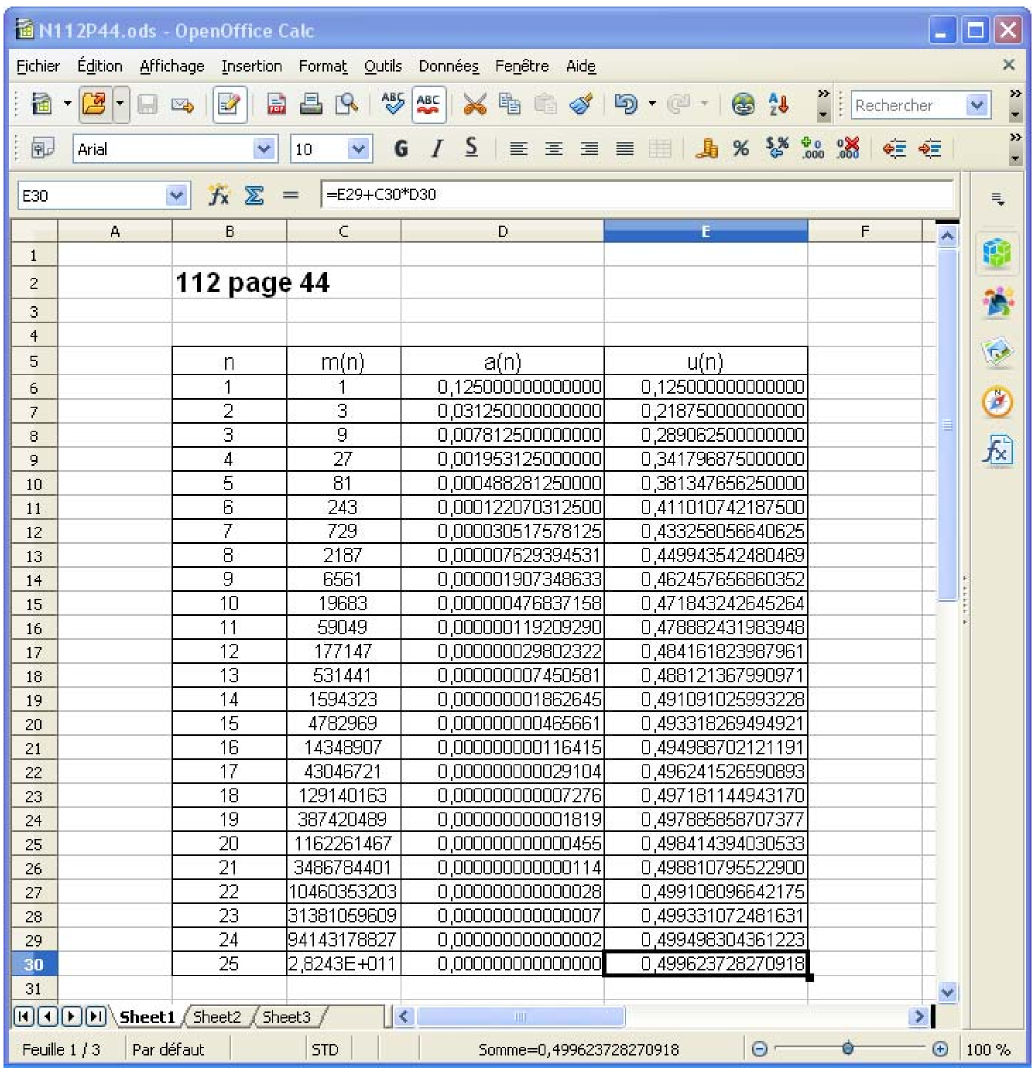
D'après le théorème de Thalès (dans sa version « théorème des milieux »), à chaque itération, les longueurs des deux côtés de l'angle droit des nouveaux triangles sont 2 fois moins moindres que dans le triangle précédent. L'aire est donc 4 fois moindre. On a donc : $a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ m_{n+1} = 3m_n \text{ et } a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n}$$

2. Par définition de la suite (u_n), on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = m_1 \times a_1 + m_2 \times a_2 + \ldots + m_n \times a_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \times a_k$$

Ce calcul est facilement mis en œuvre avec un tableur (nous avons choisi $a = 1$) :



n	m(n)	a(n)	u(n)
1	1	0,125000000000000	0,125000000000000
2	3	0,031250000000000	0,218750000000000
3	9	0,007812500000000	0,289062500000000
4	27	0,001953125000000	0,341796875000000
5	81	0,000488281250000	0,381347656250000
6	243	0,000122070312500	0,411010742187500
7	729	0,000030517578125	0,433258056640625
8	2187	0,000007629394531	0,449943542480469
9	6561	0,000001907348633	0,462457656860352
10	19683	0,000000476837158	0,471843242645264
11	59049	0,000000119209290	0,478882431983948
12	177147	0,000000029802322	0,484161823987961
13	531441	0,000000007450581	0,488121367990971
14	1594323	0,000000001862645	0,491091025993228
15	4782969	0,000000000465661	0,493318269494921
16	14348907	0,000000000116415	0,494988702121191
17	43046721	0,000000000029104	0,496241526590893
18	129140163	0,000000000007276	0,497181144943170
19	387420489	0,000000000001819	0,497885858707377
20	1162261467	0,000000000000455	0,498414394030533
21	3486784401	0,000000000000114	0,498810795522900
22	10460353203	0,000000000000028	0,499108096642175
23	31381059609	0,000000000000007	0,499331072481631
24	94143178827	0,000000000000002	0,499498304361223
25	2,8243E+011	0,000000000000000	0,499623728270918

La suite (u_n) semble croissante et convergente de limite égale à $\frac{1}{2}$ (i.e. l'aire du triangle initial : $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}$). Plus généralement, en changeant la valeur de *a*, il semble que la limite de la suite (u_n) soit égale à $\frac{1}{2}a^2$).

3. Par définition de la suite (u_n), la différence $u_{n+1} - u_n$ correspond à l'aire totale des triangles numérotés $n+1$. D'où : $u_{n+1} - u_n = m_{n+1} \times a_{n+1}$.
   D'après la question 1, la suite (m_n) est géométrique de raison 3. On a donc, pour tout entier naturel *n* non nul : $m_n = m_1 \times 3^{n-1}$. Comme il n'y a qu'un triangle numéroté 1, on a $m_1 = 1$ et, finalement : $m_n = 3^{n-1}$.
   Toujours d'après la question 1, la suite (a_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$. On a donc, pour tout entier naturel *n* non nul : $a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = a_1 \times \frac{1}{4^{n-1}}$. Comme l'aire du triangle numéroté 1 est 4 fois plus petite que l'aire du triangle initial, on a $a_1 = \frac{1}{4} \times \frac{a^2}{2}$ et, finalement : $a_n = \frac{1}{4} \times \frac{a^2}{2} \times \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{4^n} \times \frac{a^2}{2}$.
   A l'aide des deux résultats précédents, il vient alors :

$$u_{n+1} - u_n = m_{n+1} \times a_{n+1} = 3^n \times \frac{1}{4^{n+1}} \times \frac{a^2}{2} = \frac{3^n}{4^{n+1}} \times \frac{a^2}{2}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{3^n}{4^{n+1}} \times \frac{a^2}{2}}$$

4. En utilisant l'égalité obtenue à la question précédente pour diverses valeurs de *n*, on obtient :

$$u_2 = u_1 + \frac{3}{4^2} \times \frac{a^2}{2} = u_1 + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{a^2}{2}$$

$$u_3 = u_2 + \frac{3^2}{4^3} \times \frac{a^2}{2} = u_2 + \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{a^2}{2}$$

$$\ldots$$

$$u_{n-1} = u_{n-2} + \frac{3^{n-2}}{4^{n-1}} \times \frac{a^2}{2} = u_{n-2} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \times \frac{a^2}{2}$$

$$u_n = u_{n-1} + \frac{3^{n-1}}{4^n} \times \frac{a^2}{2} = u_{n-1} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times \frac{a^2}{2}$$

En les additionnant membre à membre, on obtient alors :

$$u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}+u_n=u_1+u_2+\ldots+u_{n-2}+u_{n-1}$$
$$+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{a^2}{2}+\ldots+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\times\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\times\frac{a^2}{2}$$

Soit :

$$u_n=u_1+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{a^2}{2}+\ldots+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\times\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\times\frac{a^2}{2}$$

Comme $u_1=\frac{1}{4}\times\frac{a^2}{2}$ (aire du seul triangle numéroté 1), on a :

$$\begin{aligned}
u_n&=u_1+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{a^2}{2}+\ldots+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\times\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\times\frac{a^2}{2}\\
&=\frac{1}{4}\times\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{a^2}{2}+\ldots+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\times\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\times\frac{a^2}{2}\\
&=\frac{1}{4}\times\frac{a^2}{2}\times\left(1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)\\
&=\frac{1}{4}\times\frac{a^2}{2}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\\
&=\cancel{\frac{1}{4}}\times\frac{a^2}{2}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\cancel{\frac{1}{4}}}\\
&=\frac{a^2}{2}\times\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{a^2}{2}\times\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}$$

5. Comme $\frac{3}{4}\in\left]-1\,;+1\right[$, on a immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]=1$ et enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{\frac{a^2}{2}\times\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]\right\}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{a^2}{2}$.

Comme la limite de la somme des aires de tous les triangles numérotés est égale à l'aire du triangle initial, nous pouvons conclure que le triangle ABC sera complètement recouvert par des triangles numérotés.

Ceci dit, les choses ne sont peut-être pas aussi simples que ça …
On peut par exemple considérer les intervalles $I_k = \left]\frac{1}{2^{k+1}}\,;\frac{1}{2^k}\right[$ pour k entier naturel.

La longueur $L(I_k)$ de I_k est égale à $\frac{1}{2^{k+1}}$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{n} L(I_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} L(I_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) = 1$.
En conclura-t-on pour autant que l'intervalle $[0\,;1]$ (voire l'intervalle $]0\,;1[$) est complètement recouvert par les intervalles I_k ? Non, puisqu'aucun réel de la forme $\frac{1}{2^k}$ n'appartient à un intervalle I_k.
Ainsi, on doit se méfier lorsque l'on manipule des mesures sur des ensembles (longueur, aire, probabilité, …) et que l'on cherche à conclure sur les ensembles eux-mêmes. Dans la situation de l'exercice, nous concluons positivement car les zones triangulaires considérées incluent les triangles eux-mêmes (c'est-à-dire leurs côtés).

N°115 page 45

1. Comme les deux nombres premiers qui suivent 5 sont 7 et 11, il vient immédiatement :

$$\boxed{u_4 = 0,235\,7 \text{ et } u_4 = 0,235\,711}$$

2. La suite (u_n) est clairement croissante (pour obtenir u_{n+1} à partir de u_n, on ajoute à ce dernier des décimales, c'est-à-dire un nombre strictement positif !). Par ailleurs, il est tout aussi clair qu'elle est majorée (par exemple par 0,3 … ☺). On en déduit immédiatement que la suite (u_n) est convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

N°117 page 45

Avant de se lancer dans quoi que ce soit (au risque, cela va de soi, de commettre ici un … impair ☺), on peut écrire plus simplement u_1 et u_2 :

$$u_1 = \frac{1+3}{5+7} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ et } u_2 = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

Hummm … On commence probablement à avoir une petite idée sur la suite (u_n) … Non ?
Bon, on peut se lancer dans un raisonnement par récurrence. Pourquoi pas, n'hésitez pas !
Et puis, on peut également y aller « plus directement ».

On a, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{(2\times 0+1)+(2\times 1+1)+...+(2\times n+1)}{(2(n+1)+1)+(2(n+2)+1)+...+(2\times(2n+1)+1)} = \frac{\sum_{k=0}^{n}(2k+1)}{\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2k+1)}$$

Remarquons d'abord que le numérateur et le dénominateur comportent exactement $n+1$ termes.

Pour ce qui est du numérateur, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n}2k + \sum_{k=0}^{n}1 = 2\sum_{k=0}^{n}k + (n+1) = 2\times\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = n(n+1)+(n+1) = (n+1)^2$$

Ce résultat permet de retrouver directement les numérateurs de u_1 et u_2.

Au dénominateur, les choses sont un peu plus délicates :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2k+1) &= (2(n+1)+1)+(2(n+2)+1)+...+(2\times(2n+1)+1) \\
&= (2n+2\times 1+1)+(2n+2\times 2+1)+...+(2n+2\times(n+1)+1) \\
&= 2n\times(n+1)+\sum_{k=1}^{n+1}(2k+1) = 2n\times(n+1)+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)+(2n+3) \\
&= 2n\times(n+1)+\sum_{k=0}^{n}(2k+1)-1+(2n+3) \\
&= 2n\times(n+1)+2n+2+\sum_{k=0}^{n}(2k+1) \\
&= 2n^2+4n+2+\sum_{k=0}^{n}(2k+1) \\
&= 2(n+1)^2+\sum_{k=0}^{n}(2k+1)
\end{aligned}$$

En tenant compte du résultat précédent ($\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$), il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2k+1)=2(n+1)^2+\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=2(n+1)^2+(n+1)^2=3(n+1)^2$$

Finalement : $u_n=\dfrac{\sum_{k=0}^{n}(2k+1)}{\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2k+1)}=\dfrac{(n+1)^2}{3(n+1)^2}=\dfrac{1}{3}$.

La suite (u_n) est constante : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{1}{3}$.

N°118 page 45

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1}=\dfrac{nu_n+4}{n+1}\Leftrightarrow(n+1)u_{n+1}-nu_n=4$.
En posant alors : $v_n=nu_n$, l'égalité précédente se récrit : $v_{n+1}-v_n=4$ et on en déduit immédiatement que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=4$. Il vient alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, v_n=4(n-1)+v_1$$

Or, $v_1=1\times u_1=u_1=1$. Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*, v_n=4(n-1)+v_1=4(n-1)+1=4n-3$.
C'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}^*, nu_n=4n-3$, d'où : $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\dfrac{4n-3}{n}=4-\dfrac{3}{n}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, il vient immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{3}{n}\right)=0$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$.

La suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$.

N°132 page 49

Nous allons établir le résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Pour tout entier naturel n, on pose : $\mathscr{P}_n$: « $u_n\geq 2^{n+3}$ ».

Initialisation

Pour $n=0$, on a $u_0=8$ et $2^{n+3}=2^3=8$.

On a bien $u_0 \geq 2^3$. La propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit *n* un entier naturel quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $u_n \geq 2^{n+3}$.
On s'intéresse alors à $\mathscr{P}_{n+1}$.
On veut montrer : $u_{n+1} \geq 2^{n+4}$.

On a : $u_{n+1} = 3u_n - 5$ et :

$$u_n \geq 2^{n+3} \Leftrightarrow 3u_n - 5 \geq 3 \times 2^{n+3} - 5 = 2 \times 2^{n+3} + 2^{n+3} - 5 = 2^{n+4} + 2^{n+3} - 5$$

On a aussi : $n \geq 0 \Rightarrow 2^{n+3} \geq 2^3 = 8$ et donc $2^{n+3} - 5 \geq 8 - 5 = 3 \geq 0$.
Finalement : $u_{n+1} = 3u_n - 5 \geq 2^{n+4} + 2^{n+3} - 5 \geq 2^{n+4}$.
La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

<u>Conclusion</u>

La propriété $\mathscr{P}_n$ étant initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel *n* :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2^{n+3}}$$

On a : $2^{n+3} = 8 \times 2^n$.
La suite $n \mapsto 8 \times 2^n$ étant géométrique de raison $2 > 1$ et de premier terme $8 > 2$, on a immédiatement $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(8 \times 2^n\right) = +\infty$.
Grâce au résultat de la question précédente et au théorème de comparaison, il vient finalement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

N°134 page 49

a. C'est bien sûr FAUX !
La proposition ne fait que traduire le fait que la suite (u_n) est bornée (minorée par 0 et majorée par 1). Une telle suite vérifie bien $0 \leq u_n \leq 2u_n$.
Ceci dit, il convient de proposer un contre-exemple !
Nous pouvons considérer la suite de terme général : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^n}{4}$.

Lorsque n est pair, on a : $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et lorsque n est impair : $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
Cette suite vérifie toutes les conditions mais ne converge pas.

b. Là encore, c'est $\boxed{\text{FAUX}}$.
Utilisons la suite (u_n) définie précédemment.
Si n est pair, on a : $u_n = \frac{3}{4}$ et $2u_n = \frac{3}{2}$. Dans ce cas, on peut prendre $v_n = 1$.
Si n est impair, on a : $u_n = \frac{1}{4}$ et $2u_n = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, on peut prendre $v_n = \frac{3}{8}$.
On dispose ainsi d'une suite (v_n) qui vérifie toutes les conditions mais qui ne converge pas.

c. Proposition piégeuse … ☺
En effet, dans le cas général, c'est $\boxed{\text{FAUX}}$ mais il y a une situation où c'est vrai (malgré tout, on conclut bien sûr au fait que la proposition est fausse puisqu'elle n'est <u>pas toujours vraie</u> ! ☺).
Notons L la limite de la suite (u_n).
On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2u_n = 2\text{L}$.
Si $2\text{L} = \text{L}$, c'est-à-dire si $\text{L} = 0$, alors l'inégalité $u_n \leq v_n \leq 2u_n$ entraîne (théorème d'encadrement) que la suite (v_n) converge et admet également pour limite $\text{L} = 0$.
MAIS si $\text{L} \neq 0$, alors on peut construire une suite (v_n) non convergente et vérifiant les conditions imposées.

On suppose donc $\text{L} \neq 0$.
Comme la suite (u_n) est à termes positifs, on a donc $\text{L} > 0$.
Soit alors un réel ε strictement positif tel que les intervalles $]\text{L}-\varepsilon\,;\text{L}+\varepsilon[$ et $]2\text{L}-\varepsilon\,;2\text{L}+\varepsilon[$ soient disjoints.
En d'autres termes, on veut : $\text{L}-\varepsilon < \text{L}+\varepsilon < 2\text{L}-\varepsilon < 2\text{L}+\varepsilon$.
Il suffit d'avoir : $\text{L}+\varepsilon < 2\text{L}-\varepsilon$, soit $\varepsilon < \frac{\text{L}}{2}$.
On prend, par exemple : $\varepsilon = \frac{\text{L}}{4}$.

La construction de la suite (v_n) repose sur le fait suivant : à partir d'un certain rang N, les termes de la suite (u_n) seront tous dans l'intervalle $\left]\text{L}-\frac{\text{L}}{4}\,;\text{L}+\frac{\text{L}}{4}\right[= \left]\frac{3\text{L}}{4}\,;\frac{5\text{L}}{4}\right[$ et ceux de la suite $(2u_n)$ dans l'intervalle $\left]2\text{L}-\frac{\text{L}}{4}\,;2\text{L}+\frac{\text{L}}{4}\right[= \left]\frac{7\text{L}}{4}\,;\frac{9\text{L}}{4}\right[$.

Il suffit donc, pour obtenir notre contre-exemple, de construire une suite (v_n) divergente telle qu'à partir du rang N tous ses termes appartiennent à l'intervalle $\left]\frac{5L}{4};\frac{7L}{4}\right[$.

Dans cet intervalle, il y a de la place ! ☺

Il est centré en : $\frac{1}{2}\left(\frac{5L}{4}+\frac{7L}{4}\right)=\frac{3L}{2}$ et sa longueur vaut : $\frac{7L}{4}-\frac{5L}{4}=\frac{L}{2}$.

<u>A partir du rang N</u>, on peut définir v_n comme suit :

- Si n est pair, on pose : $\frac{3L}{2}-\frac{L}{8}=\frac{11L}{8}$.
- Si n est impair, on pose : $\frac{3L}{2}+\frac{L}{8}=\frac{13L}{8}$.

En deçà du rang N, on choisira v_n quelconque tel que $0 \le u_n \le v_n \le 2u_n$ soit vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a aura $0 \le u_n \le v_n \le 2u_n$ mais la suite (v_n) ne sera pas convergente (à partir du rang N, elle oscille entre deux valeurs distinctes).

d. La proposition est $\boxed{\text{VRAIE}}$.
On a, pour tout entier naturel n : $u_n \le v_n$. Le théorème de comparaison permet alors de conclure.

e. C'est, une fois encore, $\boxed{\text{FAUX}}$!
Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la suite (u_n) définie comme suit :

- Si n est pair, $u_n = 1$.
- Si n est impair, $u_n = 1,1$.

On considère alors la suite constante (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1,5$.