
Suites.

Travaux pratiques
Version du 29/06/2015

Les travaux pratiques corrigés dans ce document apparaissent dans votre livre pages 26 et 27.

N°17 page 26

Partie A – Approche à l'aide d'un algorithme

1. On a : $u_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2}$.

Ainsi, dans la boucle, la variable u doit être incrémentée de $\sin \frac{i}{n^2}$, la variable compteur i

devant prendre les valeurs 1, 2, 3, ..., n .

On obtient ainsi :

```
Variables  $n, i$  : entiers ;  $u$  : réel ;  
Début  
    Entrer( $n$ ) ;  
     $u \leftarrow 0$  ;  
    Pour  $i$  allant de 1 à  $n$  Faire  
         $u \leftarrow u + \sin \frac{i}{n^2}$  ;  
    FinPour  
    Afficher( $u$ )  
Fin.
```

2. A la calculatrice, on obtient alors :

$$\begin{aligned} u_{10} &\approx 0,549\,496 \\ u_{10} &\approx 0,509\,982\,602 \\ u_{100} &\approx 0,504\,995\,750 \end{aligned}$$

3. D'après les valeurs calculées précédemment, il semble que la suite (u_n) soit décroissante et converge vers 0,5.

Partie B – Stratégie

1. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \times (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$v_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il vient (somme) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ et enfin (produit) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{n+1}{2n} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 < \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^2} < \dots < \frac{n}{n^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$.

On peut donc utiliser l'encadrement $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

Pour tout entier k compris entre 1 et n , on a donc : $\frac{k}{n^2} - \frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^3}{6} \leq \sin \frac{k}{n^2} \leq \frac{k}{n^2}$.

En sommant membre à membre les n inégalités doubles ainsi obtenues, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^3}{6} \right) &\leq \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 &\leq u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ \Leftrightarrow v_n - \frac{1}{6n^6} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} &\leq u_n \leq v_n \\ \Leftrightarrow v_n - \frac{(n+1)^2}{24n^4} &\leq u_n \leq v_n \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - \frac{(n+1)^2}{24n^4} \leq u_n \leq v_n$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{(n+1)^2}{24n^4} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{24n^4} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{24n^2}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1$.

Mais il vient aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{24n^2} = 0$ et enfin (produit) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{24n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{24n^2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right] = 0$$

On a finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[v_n - \frac{(n+1)^2}{24n^4} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$ puis, grâce au théorème des

gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Ainsi, la conjecture relative à la limite de la suite (u_n) formulée dans la partie A est exacte.

N°20 page 26

Supposons que le nombre proposé (sous une forme assez... déroutante, n'est-ce pas ? On parle « simplement » d'une fraction continue) existe. Appelons-le L .

On observe alors :

$$L = 1 + \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}_{=L}} = 1 + \frac{1}{L}$$

L est donc solution de l'équation : $x = 1 + \frac{1}{x}$, soit : $x^2 - x - 1 = 0$.

Avant de poursuivre, précisons que l'on travaillera donc avec la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Forts de ces premiers résultats, on peut étudier la monotonie de la suite (u_n) .

On a facilement :

$$u_0 = 1, u_1 = f(u_0) = f(1) = 2 > u_0, u_2 = f(u_1) = f(2) = \frac{3}{2} < u_1, u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{3} > u_2$$

$$u_4 = f(u_3) = f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{8}{5} < u_3, u_5 = f(u_4) = f\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{13}{8} > u_4 \text{ et } u_6 = f(u_5) = f\left(\frac{13}{8}\right) = \frac{21}{13} < u_5$$

La suite (u_n) ne semble donc ni croissante, ni décroissante (ceci dit, elle l'est peut-être à partir d'un certain rang...). On remarque en revanche que l'on a : $u_0 < u_2 < u_4$ et $u_1 > u_3 > u_5$.

On peut alors étudier les suites (dites « extraites ») : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

Nous allons en fait montrer que la première est strictement croissante et que la seconde est strictement décroissante.

Remarquons d'abord que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(u_{2n})$$

$$u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = (f \circ f)(u_{2n+1})$$

Il est donc légitime d'introduire la fonction $g = f \circ f$ définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$g = f \circ f : x \mapsto 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

La fonction g est définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et elle y est dérivable en tant que fonction rationnelle. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$g'(x) = \frac{2 \times (x+1) - (2x+1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

La fonction g est donc strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Considérons alors la suite (u_{2n}) .

Nous allons montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, on a : $u_{2n+2} > u_{2n}$.

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $u_2 = \frac{3}{2} > 1 = u_0$.

Supposons que ce soit vrai au rang n (n quelconque fixé).

On souhaite vérifier la propriété au rang $n+1$, c'est-à-dire : $u_{2n+4} > u_{2n+2}$.

Comme la propriété est supposée vraie au rang n , on a : $u_{2n+2} > u_{2n}$. Plus précisément :

$u_{2n+2} > u_{2n} \geq 1$. Or, la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$. On en déduit :

$$g(u_{2n+2}) > g(u_{2n}) \geq g(1)$$

C'est-à-dire : $u_{2n+4} > u_{2n+2} \geq \frac{3}{2}$.

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

La propriété étant initialisée pour $n=0$ et héréditaire, on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier naturel n .

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} > u_{2n}$.

La suite (u_{2n}) est bien strictement croissante.

En raisonnant de façon similaire, on montre que la suite (u_{2n+1}) est strictement décroissante.

La suite (u_{2n}) est strictement croissante. Puisque la suite (u_n) est majorée par 2, il en va de même pour la suite (u_{2n}) . La suite (u_{2n}) étant croissante et majorée, elle converge. Soit L_1 sa limite. Comme $u_{2n+2} = g(u_{2n}) = \frac{2u_{2n}+1}{u_{2n}+1}$, il vient immédiatement, en passant à la limite :

$$L_1 = \frac{2L_1+1}{L_1+1}$$

Il vient alors : $L_1(L_1+1) = 2L_1+1$, soit $L_1^2 - L_1 - 1 = 0$.

On retrouve l'équation que nous avons obtenue initialement et comme on a $1 \leq u_{2n} \leq 2$ pour tout n entier naturel, il vient immédiatement $1 \leq L_1 \leq 2$ et donc : $L_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On raisonne exactement de la même façon avec la suite (u_{2n+1}) strictement décroissante et minorée par 1. Elle est convergente vers L_2 et vérifie la même relation de récurrence que (u_{2n}) . On en déduit que L_2 est solution de la même équation du second degré et, in fine, que

l'on a : $L_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Suites

Travaux pratiques / Version du 29/06/2015

Les résultats précédents nous donnent directement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$