

Exercice N°1

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par : $f(x) = (x + \frac{1}{4}) e^{-4x} + b$.

(a) [1 point] Pour tout x réel dans l'intervalle $[0; 2]$, on a :

$$f'(x) = 1 \times e^{-4x} + (x + \frac{1}{4}) \times (-4) \times e^{-4x} = (1 - 4x - 1) \times e^{-4x} = -4x \times e^{-4x}$$

Pour tout x réel dans l'intervalle $[0; 2]$, on a : $f'(x) = -4x \times e^{-4x}$.

(b) [0,5 point] La fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives sur \mathbb{R} , le signe de $f'(x)$ est celui de $-4x$. Comme $x \in [0; 2]$, on a $f'(x) = 0 \iff x = 0$ et $\forall x \in]0; 2]$, $f'(x) < 0$.

On en déduit immédiatement que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 2]$.

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 2]$.

2. [0,5 point] Puisque la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 2]$, elle atteint son maximum en 0. Les variables étant ici exprimées en mètres, on doit donc avoir $f(0) = 1,5$.

$$\text{On a : } f(0) = 1,5 \iff (0 + \frac{1}{4}) e^{-4 \times 0} + b = 1,5 = \frac{3}{2} \iff \frac{1}{4} + b = \frac{3}{2} \iff b = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

La hauteur maximale du portail est égale à 1,5m pour $b = \frac{5}{4}$.

Partie B : détermination d'une aire

1. [1 point] La fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$ si, et seulement si, f est dérivable sur cet intervalle et : $\forall x \in [0; 2]$, $F'(x) = f(x)$.

Les fonctions $x \mapsto -\frac{x}{4} - \frac{1}{8}$ et $x \mapsto \frac{5}{4}x$ sont dérivables sur \mathbb{R} en tant que fonctions polynômes. Elles le sont donc a fortiori sur l'intervalle $[0; 2]$.

La fonction $x \mapsto e^{-4x}$ est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} : la fonction linéaire $x \mapsto -4x$ et la fonction exponentielle. Elle l'est a fortiori sur l'intervalle $[0; 2]$.

Pour tout x réel de l'intervalle $[0; 2]$, on a alors :

$$F'(x) = -\frac{1}{4} \times e^{-4x} + (-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}) \times (-4) \times e^{-4x} + \frac{5}{4} = (-\frac{1}{4} + x + \frac{1}{2}) \times e^{-4x} + \frac{5}{4} = (x + \frac{1}{4}) \times e^{-4x} + \frac{5}{4} = f(x)$$

De ce qui précède on tire finalement :

La fonction $F : x \mapsto (-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}) e^{-4x} + \frac{5}{4}x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.

2. [1 point] Rappelons que le bord inférieur d'un vantail est situé à 0,05m du sol. Les variables correspondant à des mètres, l'unité d'aire correspond à 1m^2 et l'aire du vantail est donc donné par l'aire du domaine situé entre les courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = 0,05$ et les droites verticales d'équations $y = 0$ et $y = 2$. Si on note \mathcal{A} cette aire, on a : $\mathcal{A} = \int_0^2 f(t) dt - \int_0^2 0,05 dt$. Soit :

$$\mathcal{A} = [F(x)]_0^2 - 2 \times 0,05 = F(2) - F(0) - 0,1 = (-\frac{2}{4} - \frac{1}{8}) e^{-4 \times 2} + \frac{5}{4} \times 2 - (-\frac{0}{4} - \frac{1}{8}) e^{-4 \times 0} - \frac{5}{4} \times 0 - 0,1 = -\frac{5}{8} e^{-8} + \frac{5}{2} + \frac{1}{8} - 0,1 = -\frac{5}{8} e^{-8} + 2,525 \approx 2,52$$

On en conclut :

L'aire d'un vantail est de $-\frac{5}{8} e^{-8} + 2,525\text{m}^2$ soit environ $2,52\text{m}^2$.

Partie C : utilisation d'un algorithme

1. [0,5 point] Notons x_k l'abscisse des points correspondant au bord gauche de la planche numéro k .
 Chaque planche ayant une largeur de 0,12m et les planches étant espacées de 0,05m, il vient : $x_k = 0,17k$.
 Notons ensuite y_k l'ordonnée du point supérieur gauche de la planche numéro k : on a immédiatement $y_k = f(x_k)$.
 La largeur de chaque planche étant de 0,12m et chaque planche se trouvant à 0,05m du sol, l'aire de la planche k vaut $0,12 \times (y_k - 0,05) = 0,12 \times (f(x_k) - 0,05) = 0,12 \times (f(0,17k) - 0,05)$.

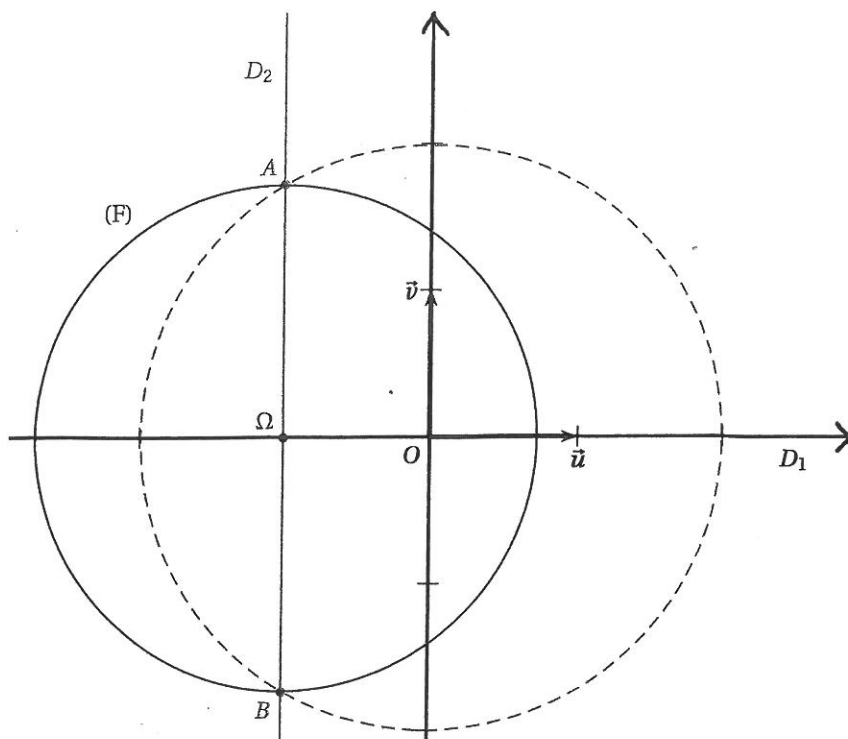
L'aire de la planche k vaut $0,12 \times (f(0,17k) - 0,05)$.

2. [0,5 point] On a :

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0 On affecte à X la valeur 0
Traitement :	Tant Que $X + 0,17 < 2,05$ S prend la valeur $S + 0,12 \times (f(X) - 0,05)$ X prend la valeur $X + 0,17$ Fin de Tant Que
Affichage :	On affiche S

Remarque : une partie du test **Tant Que** nous est imposée (la partie gauche de l'inégalité). Ce test traduit le fait que la partie droite de la dernière planche doit avoir une abscisse inférieure à 2. On aurait donc pu (dû ?) raisonner avec $X + 0,15$ mais comme $X + 0,17$ est imposé, on doit ajouter 0,05 à l'abscisse maximale autorisée (on a alors bien $X + 0,17 < 2,05 \iff X + 0,12 < 2$). On obtient ainsi 2,05.

Figure de l'exercice 2



EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. $f(-1 + i\sqrt{3}) = (-1 + i\sqrt{3})^2 + 2(-1 + i\sqrt{3}) + 9 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5$

2. On résout dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$:

$f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 9 = 5 \iff z^2 + 2z + 4 = 0; \Delta = 4 - 16 = -12 = -(2\sqrt{3})^2$

Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$

On appelle A le point d'affixe $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $z_B = -1 - i\sqrt{3}$

$|z_A| = \sqrt{1+3} = 2$

Soit θ_A un argument de z_A : $\left. \begin{matrix} \cos \theta_A = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\} \implies \theta_A = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc $z_A = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

$|z_A| = 2$ donc le point A se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2. De plus la partie réelle de A vaut -1 donc A se trouve sur la droite d'équation $x = -1$. Idem pour B .

Voir graphique page précédente.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

$f(z) = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$

Pour que l'équation $f(z) = \lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2 + 2z + 9 - \lambda$ soit strictement négatif.

$\Delta = 4 - 4(9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32; \Delta < 0 \iff 4\lambda - 32 < 0 \iff \lambda < 8$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $] -\infty; 8[$.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z) - 8| = 3$

$f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$; donc $|f(z) - 8| = |(z+1)^2| = |z+1|^2$ car le module d'un carré est égal au carré du module.

Donc $|f(z) - 8| = 3 \iff |z+1|^2 = 3 \iff |z+1| = \sqrt{3}$

Soit Ω le point d'affixe -1 , donc de coordonnées $(-1; 0)$; si on appelle M le point d'affixe z , alors

$|z+1| = \sqrt{3} \iff |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$.

L'ensemble des points M vérifiant $|z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.

On trace (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

a. $f(z) = z^2 + 2z + 9 = (x + iy)^2 + 2(x + iy) + 9 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy + 9 = x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$

b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

$f(z)$ réel $\iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x+1) = 0 \iff y = 0$ ou $x = -1$

Donc (E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x = -1$.

6. Le cercle (F) est de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$. Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(-1 - \sqrt{3}; 0)$ et $(-1 + \sqrt{3}; 0)$.

Les points A et B ont pour affixes z_A et z_B dont les parties réelles sont égales à -1 ; donc A et B sont situés sur la droite D_2 .

$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1 + i\sqrt{3} + 1| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ donc le point A appartient au cercle (F).

$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |-1 - i\sqrt{3} + 1| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ donc le point B appartient au cercle (F).

Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont :

$(-1 - \sqrt{3}; 0), (-1 + \sqrt{3}; 0), (-1; \sqrt{3})$ et $(-1; -\sqrt{3})$

0,25

0,5

1
(0,5 pour chaque)

Figure 0,5
(0,25 pour chaque)

0,5

Figure 0,25

0,25

0,5

Figure 0,25

0,5

Exercice 3

On nomme ainsi les événements:

- B_1 : tirer une boule blanche au premier tirage
- B_2 : tirer une boule blanche au deuxième tirage
- N_1 : tirer une boule noire au premier tirage
- N_2 : tirer une boule noire au deuxième tirage

1) a) A est l'événement: $B_1 \cap B_2$ ou $N_1 \cap N_2$ donc $p(A) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(N_1) \times p_{N_1}(N_2)$

$$p(A) = \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{n+3} \times \frac{1}{2} = \frac{3n+6}{4(n+3)} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{n+2}{n+3}\right)$$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{3}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} \times \left(\frac{n+2}{n+3}\right) = \frac{3}{4}$ d'où $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A) = \frac{3}{4}}$

2) B est l'événement: $N_1 \cap B_2$ donc $p(B) = p(N_1) \times p_{N_1}(B_2)$

$$p(B) = \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{4(n+3)}$$

3) a) A l'issue d'une épreuve, le mieux qu'il puisse espérer est un gain de $(2n - 20)\text{€}$,

Il faut donc que : $2n - 20 > 0$, c'est à dire : $n > 10$

b) $P(X = n - 20) = p(A) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{n+2}{n+3}\right)$; $p(X = 2n - 20) = p(B) = \frac{6}{4(n+3)}$

$$p(X = -20) = 1 - p(A) - p(B) = 1 - \frac{3}{4} \times \left(\frac{n+2}{n+3}\right) - \frac{6}{4(n+3)} = \frac{4(n+3) - 3(n+2) - 6}{4(n+3)}$$

$$p(X = -20) = \frac{n}{4(n+3)}$$

d'où le tableau:

x_i	$2n - 20$	$n - 20$	-20
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{4(n+3)}$	$\frac{3}{4} \times \left(\frac{n+2}{n+3}\right)$	$\frac{n}{4(n+3)}$

c) $E(X) = (2n - 20) \times \frac{6}{4(n+3)} + (n - 20) \times \frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3}\right) - 20 \times \frac{n}{4(n+3)}$

$$E(X) = \frac{12n - 120 + (n - 20)(3n + 6) - 20n}{4(n+3)}$$

donc : $\boxed{E(X) = \frac{3n^2 - 62n - 240}{4(n+3)}}$

d) $E(X) > 0 \Leftrightarrow 3n^2 - 62n - 240 > 0$, calculons $\Delta = 62^2 - 4 \times 3 \times (-240) = 82^2$

ce trinôme a deux racines $x_1 = \frac{62 + 82}{6} = 24$ et $x_2 = \frac{62 - 82}{6} = -\frac{10}{3}$

d'après le cours, $3n^2 - 62n - 240 > 0$ pour $n > 24$ car $n > 0$, or n entier donc $n \geq 25$

il faut au moins 25 boules blanches dans U_1

Barème : 1)a)1 b)0.5

2)1

3)a)0.5 b)1 c)0.5 d)0.5

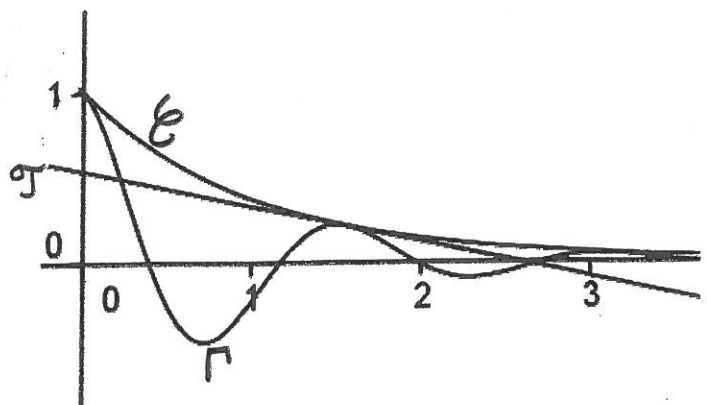
EXERCICE 4 (non spé)

5 points

0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
0,25
0,75

1. a. On a $-1 \leq \cos(4x) \leq 1$, donc par produit :

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}.$$
- b. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, d'après le théorème des « gendarmes » : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est donc asymptote à Γ au voisinage de plus l'infini.
2. On sait que $e^{-x} \neq 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, donc $e^{-x} = e^{-x} \cos(4x) \iff \cos(4x) = 1 \iff 4x = 0 [2\pi] \iff x = 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$.
- Les points communs aux deux courbes sont donc les points $M_k \left(k \frac{\pi}{2}; e^{-k \frac{\pi}{2}} \right)$.
3. a. $u_{n+1} = f\left((n+1) \frac{\pi}{2} \right) = e^{-(n+1) \frac{\pi}{2}} = e^{-n \frac{\pi}{2}} \times e^{-\frac{\pi}{2}} = u_n \times e^{-\frac{\pi}{2}}$.
 La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{2}}$.
- b. $e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,2$ et $u_0 = 1$ donc la suite est positive et décroissante et d'après la question 1. a. la limite de cette suite est nulle.
4. a. On a $f'(x) = -e^{-x} \cos(4x) - e^{-x} \times 4 \sin(4x) = -e^{-x} [\cos(4x) + 4 \sin(4x)]$.
 De même $g'(x) = -e^{-x}$.) non demandé en 4.2.
- b. Or si $x = k \frac{\pi}{2}$, $\cos(4x) = 1$ et $\sin(4x) = 0$.
 On a donc $f'\left(k \frac{\pi}{2} \right) = g'\left(k \frac{\pi}{2} \right) = -e^{-k \frac{\pi}{2}}$. Donc les courbes Γ et \mathcal{E} ont même tangente en chacun de leurs points communs.
5. On a $f'\left(\frac{\pi}{2} \right) = -e^{-\frac{\pi}{2}} \approx -0,2$.
- Figure : Γ et \mathcal{E}



Exercice 4 (spécialité)

1)a) On calcule: $11 \times 4 - 5 \times 6 = 44 - 30 = 14$, on en déduit que $(4; 6)$ est solution de (E)

b) $(x; y)$ est solution de $(E) \Leftrightarrow 11x - 5y = 14 \Leftrightarrow 11x - 5y = 11 \times 4 - 5 \times 6 \Leftrightarrow 11(x - 4) = 5(y - 6)$

11 divise $5(y - 6)$ et 11 est premier avec 5 , donc, d'après le théorème de Gauss 11 divise $y - 6$, il existe k entier relatif tel que $y - 6 = 11k$, en remplaçant dans (E) on trouve: $11(x - 4) = 5 \times 11k$

d'où $x - 4 = 5k$, finalement, les couples solutions $(x; y)$ sont tels que: $\begin{cases} x = 4 + 5k \\ y = 6 + 11k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

2)a) $2^3 = 8$ et $8 - 1 = 1 \times 7$ donc $8 \equiv 1(7)$ d'où $2^3 \equiv 1(7)$, donc pour tout n entier naturel,

$(2^3)^n \equiv 1^n(7)$ on a bien $2^{3n} \equiv 1(7)$

b) $2011 = 287 \times 7 + 2$ donc $2011 \equiv 2(7)$ d'où $2011^{2012} \equiv 2^{2012}(7)$

or, $2012 = 670 \times 3 + 2$ donc $2^{2012} = 2^{670 \times 3 + 2} = 2^{670 \times 3} \times 4$ et on sait que: $2^{670 \times 3} \equiv 1(7)$

On en conclut que: $2^{2012} \equiv 4(7)$ donc $2011^{2012} \equiv 4(7)$ le reste recherché est 4 ($0 \leq 4 < 7$)

$$3)a) M^2 = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + (1-a)(1-b) & (a+b)(1-a) \\ (a+b)(1-b) & (1-a)(1-b) + b^2 \end{pmatrix}$$

$$(a+b)M = \begin{pmatrix} a(a+b) & (a+b)(1-a) \\ (a+b)(1-b) & b(a+b) \end{pmatrix}$$

$$M^2 - (a+b)M = \begin{pmatrix} 1-a-b & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix} = (1-a-b)I_2$$

$$b) M^2 = (1-a-b)I_2 + (a+b)M \text{ d'où } M^2 = M \Leftrightarrow (1-a-b)I_2 + (a+b)M = M$$

$$M^2 = M \Leftrightarrow (1-a-b)I_2 = (1-a-b)M \Leftrightarrow (1-a-b)(I_2 - M) = 0_2$$

d'où les solutions : $1 - a - b = 0$ ou $I_2 = M$, finalement, les solutions sont: la matrice I_2 et les matrices

M de la forme: $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ avec a réel

4) étapes pour $A = 12$ ($\sqrt{12} \approx 3.46$)

$1 \leq \sqrt{12}$ test: $\frac{12}{1}$ entier alors on affiche **1 et 12** N prend la valeur 2

$2 \leq \sqrt{12}$ test: $\frac{12}{2}$ entier alors on affiche **2 et 6** N prend la valeur 3

$3 \leq \sqrt{12}$ test: $\frac{12}{3}$ entier alors on affiche **3 et 4** N prend la valeur 4

$4 > \sqrt{12}$ arrêt du programme

On a affiché : 1,2,3,4,6 et 12

Dans le cas général, cet algorithme affiche les diviseurs positifs de A

En effet, on teste tous les nombres N tels que $\frac{A}{N}$ soit entier

(on affiche ces diviseurs par paires: N et $\frac{A}{N}$ avec $N \leq \sqrt{A}$ et $\frac{A}{N} \geq \sqrt{A}$)

Barème :

1)a)0.25 b)1) 2)a)0.25 b)1) 3)a)0.5 b)0.75 4)0.75+0.5