TERMINALES S
BACCALAUREAT BLANC DE MATHEMATIQUES N°2
AVRIL 2015

Durée 4h

Calculatrices autorisées

Le soin et la qualité de la rédaction prendront une part significative dans la notation.

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Débuter chaque exercice en haut d'une nouvelle page.

❖★❖★❖★❖★❖★❖★❖★❖★❖★❖

EXERCICE 1 : (commun à tous les candidats) (*5 points*)

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + b$$

où b est un nombre réel. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
2. Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \frac{5}{4}.$$

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$F(x)=\left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x}+\frac{5}{4}x$$

est une primitive de la fonction f.

2. En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

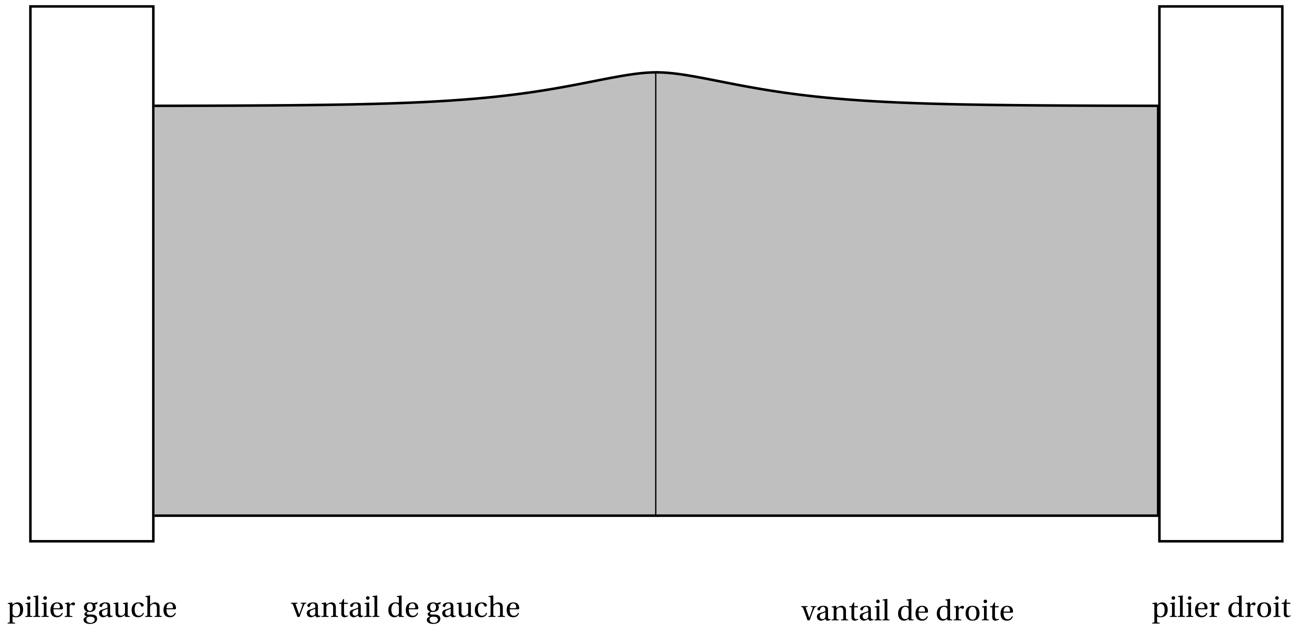
Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir l'annexe 2 de l'exercice 4) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

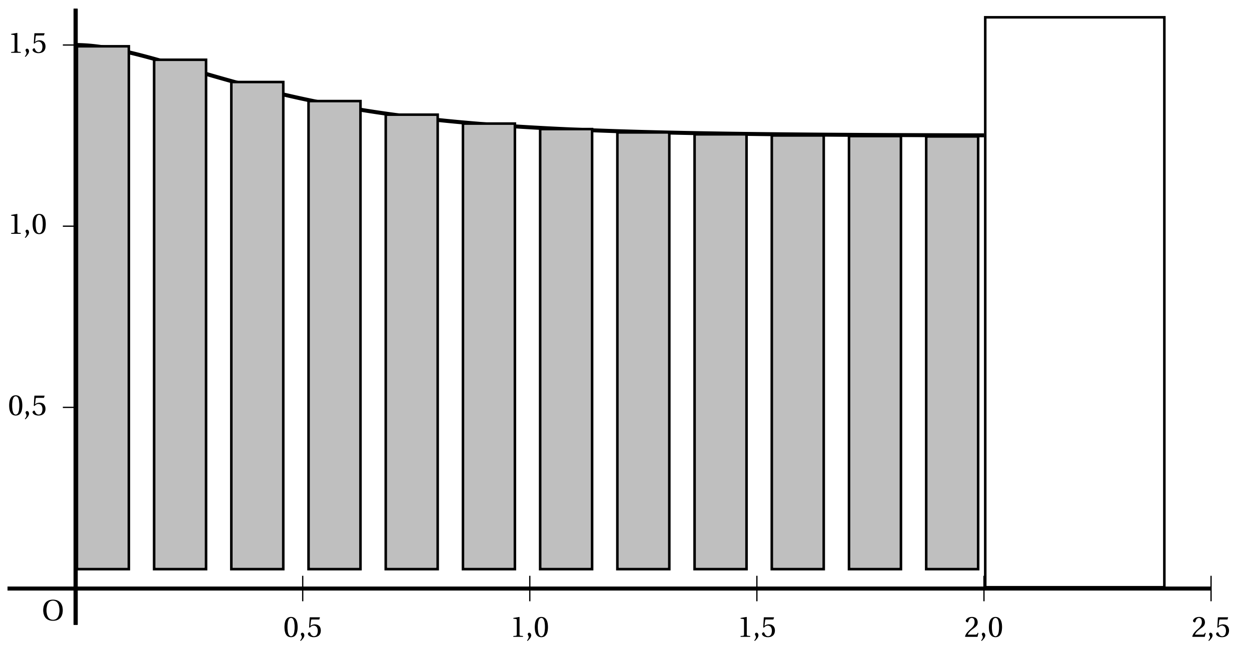
1. Donner l'aire de la planche numéro k.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0
	On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant Que** $X+0,17<\dots$
	S prend la valeur $S+\dots.$
	X prend la valeur $X+0,17$
	Fin de Tant Que
Affichage :	On affiche S

Annexe 1 de l'exercice 1 :



Annexe 2 de l'exercice 1



La distance entre le bas du portail et le sol est de 0,05 m.

EXERCICE 2 : (commun à tous les candidats) (*5 points*)

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y).$$

   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

EXERCICE 3 : (commun à tous les candidats) (*5 points*)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier avec $n \geq 1$).
U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard une boule de l'urne U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'évènement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent dans leur configuration de départ ».
   a. Montrer que la probabilité $p(\mathrm{A})$ de l'événement A peut s'écrire :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$$

   b. Déterminer la limite de $p(\mathrm{A})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère l'événement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
   Vérifier que la probabilité $p(\mathrm{B})$ de l'événement B peut s'écrire :

$$p(\mathrm{B}) = \frac{6}{4(n+3)}$$

3. Un joueur mise 20 euros et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenue dans U_2.
   - Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ euros.
   - Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n euros.
   - Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

   a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.

   Dans la suite, on considère $n > 10$, et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $\mathrm{X} = 2n - 20$).

   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
   d. On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

EXERCICE 4 : (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité) (*5 points*)

L'annexe se rapporte à cet exercice.
Elle sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de l'annexe. On considère également la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.
3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.
4. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left[\cos(4x) + 4\sin(4x)\right].$$

   b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathscr{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
   Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

EXERCICE 4 : (candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité) (*5 points*)

Les quatre questions sont indépendantes.

1. **a.** Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation

$$\text{(E)} \qquad 11x - 5y = 14.$$

   b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E).

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$2^{3n} \equiv 1 \pmod 7.$$

   b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. Soit a et b deux nombres réels, et M la matrice carrée définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

   a. Calculer $M^2 - (a+b)M$ en fonction de I_2, matrice identité de dimension 2.

   b. En déduire les matrices M telles que $M^2 = M$.

4. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

```
A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que N ⩽ √A
        Si A/N − Ent(A/N) = 0 alors Afficher N et A/N
        Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?

Que donne cet algorithme dans le cas général ?

NOM Prénom : **T°S**

Annexe : exercice 2

Annexe : exercice 4