

Terminales S6&7
DTL de Mathématiques N°5
17 mars 2015

Corrigé

Exercice N°1

1. On a facilement : $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Il vient alors : $1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$. D'où : $(1 + i)^4 = (\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}})^4 = \sqrt{2}^4 (e^{i \frac{\pi}{4}})^4 = 4 e^{i \pi}$.

Réponse b.

2. Un module étant un réel positif, on a d'abord l'équivalence : $|z - 1 + i| = |\sqrt{3} - i| \iff |z - 1 + i|^2 = |\sqrt{3} - i|^2$.
Or : $|z - 1 + i|^2 = |(x + iy) - 1 + i|^2 = |(x - 1) + (y + 1)i|^2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2$ et $|\sqrt{3} - i|^2 = \sqrt{3}^2 + (-1)^2 = 3 + 1 = 4$.
On a donc : $|z - 1 + i| = |\sqrt{3} - i| \iff |z - 1 + i|^2 = |\sqrt{3} - i|^2 \iff (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Ainsi, pour tout point M du plan d'affixe $z = x + iy$, on a : $|z - 1 + i| = |\sqrt{3} - i| \iff (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Réponse c.

3. On note que les trois premières réponses proposées sont en rapport avec le module de Z_n . La relation $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n$ nous donne immédiatement : $|Z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} Z_n \right| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \times |Z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times |Z_n|$. On en déduit ainsi que la suite $(|Z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Comme $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]-1; 1[$, on en conclut que cette suite converge (vers 0).

Réponse c.

4. On a : $Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{1+5i-(-1-i)}{2-2i-(-1-i)} = \frac{2+6i}{3-i} = 2\frac{1+3i}{3-i} = 2\frac{(1+3i)(3+i)}{9+1} = \frac{10i}{5} = 2i$. Le complexe Z n'est donc pas un réel (c'est en fait un imaginaire pur). Par ailleurs, on a immédiatement $|Z| = 2$ mais aussi $|Z| = \left| \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \right| = \frac{AC}{AB}$. On en déduit ainsi : $AB \neq AC$. Le triangle ABC n'est donc pas isocèle en A . Dans le calcul de la forme algébrique de Z , on a obtenu : $Z_C - Z_A = 2 + 6i$ et $Z_B - Z_A = 3 - i$. On en déduit : $AB^2 + AC^2 = (3^2 + 1^2) + (2^2 + 6^2) = 10 + 40 = 50$. Or $Z_C - Z_B = 1 + 5i - (2 - 2i) = -1 + 7i$. Donc : $BC^2 = |Z_C - Z_B|^2 = (-1)^2 + 7^2 = 1 + 49 = 50$. Comme $AB^2 + AC^2 = BC^2$, on en déduit, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle ABC est rectangle en A .

Réponse c.

5. Notons A le point d'affixe $-i$ et B le point d'affixe i . On a alors : $|z+i| = |z-i| \iff |z-(-i)| = |z-i| \iff AM = BM$. Ce qui équivaut au fait que le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$. Or, le milieu de ce segment n'est rien d'autre que l'origine du repère du plan complexe. Par ailleurs, la droite (AB) n'est rien d'autre que l'axe des ordonnées. Ainsi, la médiatrice du segment $[AB]$ est l'axe des abscisses du plan complexe.

Réponse a.

6. Notons d'abord que l'on a : $\left| \frac{c}{b} \right| = \left| \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \right| = \sqrt{2}$. Mais on a aussi : $\left| \frac{c}{b} \right| = \frac{|c|}{|b|} = \frac{OC}{OB}$. On a donc : $OC = \sqrt{2}OB$. Les longueurs OC et OB étant différentes, le triangle OBC n'est donc pas isocèle en O .
 Si les points O, B et C étaient alignés, il existerait un réel k tel que : $\vec{OC} = k\vec{OB}$ (le vecteur \vec{OB} est non nul puisque son affixe ne l'est pas) et on aurait alors : $c = kb$, soit $\frac{c}{b} = k \in \mathbb{R}$. Ce qui n'est pas le cas.
 En procédant par élimination, on retient finalement la réponse c.
 Mais on pouvait aussi raisonner directement comme suit : $\left(\vec{OB}, \vec{OC} \right) = \arg \frac{c}{b} = \arg \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.
 Ainsi, dans le triangle OBC , on a : $\widehat{BOC} = \frac{\pi}{4}$. De plus, comme on l'a vu ci-dessus : $OC = \sqrt{2}OB$. On peut alors conclure.

Réponse c.

7. En tenant compte de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, il vient : $i\frac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

Réponse d.

8. Posons $z = x + iy$. On a alors : $-z = \bar{z} \iff -(x + iy) = x - iy \iff -x - iy = x - iy \iff x = 0$. L'équation admet ainsi une infinité de solutions : y peut être choisi quelconque. Ces solutions sont donc les imaginaires purs. Les points correspondants du plan complexe sont donc les points de l'axe des ordonnées.

Réponse c.

Exercice N°2

1. Soit f la fonction de la variable complexe z définie par : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

(a) Pour tout complexe z , on a :

$$\begin{aligned} (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) &= z^3 - 2\sqrt{3}z^2 + 4z - 2iz^2 + 4\sqrt{3}iz - 8i = \\ z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i &= f(z) \end{aligned}$$

On a bien :

Pour tout complexe z : $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

(b) On a : $f(z) = 0 \iff (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0 \iff z - 2i = 0$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

On a immédiatement : $z - 2i = 0 \iff z = 2i$. Nous posons (en jetant un oeil à la suite de l'énoncé...) $z_3 = 2i$.

Réolvons maintenant : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

On a affaire à une équation du second degré à coefficients réels. Son discriminant Δ vaut : $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4$.

Le discriminant étant strictement négatif, l'équation admet deux racines complexes conjuguées. Comme $|\Delta| = 4$, il vient : $z_2 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$ et $z_1 = \bar{z}_2 = \sqrt{3} - i$.

Finalement :

L'équation $f(z) = 0$ admet trois solutions : $2i, \sqrt{3} - i$ et $\sqrt{3} + i$.

(c) On a facilement : $|z_2| = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$.

On a donc : $z_2 = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et : $z_1 = \bar{z}_2 = \sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

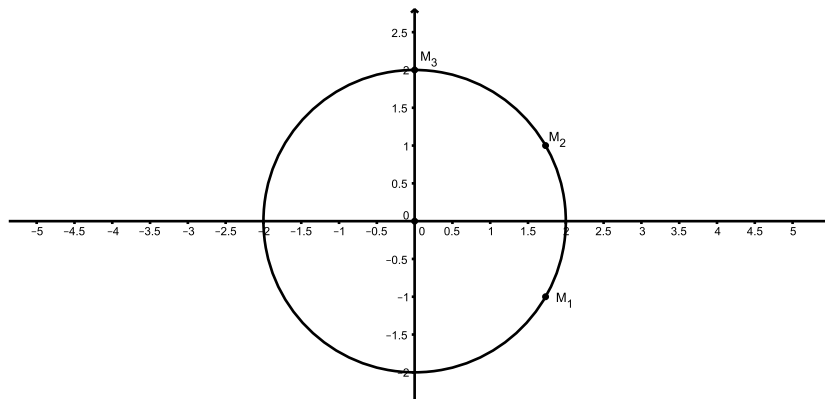
Par ailleurs, on a : $z_3 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Finalement :

$z_1 = \sqrt{3} - i = e^{-i\frac{\pi}{6}}, z_2 = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_3 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

1. On pose $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = 2i$.

(a) On obtient facilement :



On a : $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2 \iff OM_1 = OM_2 = OM_3 = 2$. On en déduit immédiatement que les points M_1 , M_2 et M_3 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

Les points M_1 , M_2 et M_3 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

(b) On peut procéder de diverses façons.

i. 1ère approche : $OM_1M_2M_3$ est un losange si, et seulement si, les longueurs de ses quatre côtés sont égales.

On a déjà : $OM_1 = OM_3 = 2$. Par ailleurs $|M_2M_3| = |z_3 - z_2| = |2i - (\sqrt{3} + i)| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{3 + 1} = 2$. Enfin : $|M_3M_1| = |z_1 - z_3| = |(\sqrt{3} - i) - (2i)| = |\sqrt{3} - 3i| = 2$.

On a donc : $OM_3 = M_3M_2 = M_2M_1 = OM_1$. Le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est bien un losange.

ii. 2ème approche : $OM_1M_2M_3$ est un losange si, et seulement si, ses diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu.

L'affixe du milieu du segment $[OM_2]$ vaut : $\frac{0+z_2}{2} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

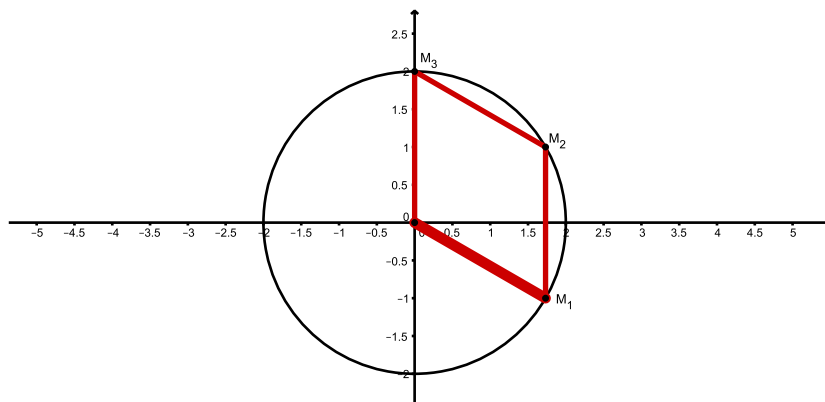
L'affixe du milieu du segment $[M_1M_3]$ vaut $\frac{z_1+z_3}{2} = \frac{\sqrt{3}-i+2i}{2} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

Les affixes obtenues sont égales. Les diagonales du quadrilatère $OM_1M_2M_3$ ont bien le même milieu.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM_2}$ vaut z_2 , c'est à dire : $\sqrt{3} + i$. Celle du vecteur $\overrightarrow{M_1M_3}$ vaut : $z_3 - z_1 = 2i - (\sqrt{3} - i) = -\sqrt{3} + 3i$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ admettent respectivement pour coordonnées : $(\sqrt{3}; 1)$ et $(-\sqrt{3}; 3)$. Il vient alors : $\overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) + 1 \times 3 = 0$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ sont orthogonaux. Les droites (OM_2) et (M_1M_3) sont perpendiculaires.

Le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.



Exercice N°3

Partie A

1. Pour tout x réel strictement positif, on a : $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1$ et enfin (division) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$. Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$.
 Par ailleurs, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.
 Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - 0 = 1$ et on en déduit immédiatement :

La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

2. La fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ comme fraction rationnelle y étant définie. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable \mathbb{R} comme composée de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} (la fonction $x \mapsto -x$ et la fonction exponentielle). Elle l'est donc sur l'intervalle $[0; +\infty[$. En définitive, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ comme différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout x réel positif, on a alors :

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+1) - (x-1) \times 1}{(x+1)^2} - (-1) \times e^{-x} = \frac{2}{(x+1)^2} + e^{-x}$$

On a immédiatement : $\forall x \in [0; +\infty[$, $\frac{2}{(x+1)^2} > 0$. Par ailleurs, la fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives. Il en va donc de même pour la fonction $x \mapsto e^{-x}$. On en déduit finalement : $\forall x \in [0; +\infty[$, $f'(x) > 0$. Ainsi :

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0) = f'(0) \times x + f(0)$. On a : $f(0) = \frac{0-1}{0+1} - e^{-0} = -1 - 1 = -2$ et $f'(0) = \frac{2}{(0+1)^2} + e^{-0} = 2 + 1 = 3$. D'où : $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0) = 3 \times x - 2$. Finalement :

Une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 est : $y = 3x - 2$.

4. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ (cf. la question 2.). Elle y est donc continue. On a également vu qu'elle y était strictement croissante. Par ailleurs, $f(0) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

On déduit de ce qui précède, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, que la fonction f définit une bijection de l'intervalle $[0; +\infty[$ dans l'intervalle $[-2; 1[$.

Comme $0 \in [-2; 1[$, on en déduit finalement que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution u dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

On a : $f(1) = \frac{1-1}{1+1} - e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0$ et $f(2) = \frac{2-1}{2+1} - e^{-2} = \frac{1}{3} - e^{-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2-3}{3e^2} > 0$. On en déduit immédiatement : $1 < u < 2$.

En tabulant la fonction f à la calculatrice entre 1 et 2 avec un pas de 0,1 on obtient : $f(1,5) \simeq -0,023$ et $f(1,6) \simeq 0,029$.

En définitive :

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution u dans l'intervalle $[1; 2]$ et on a : $1,5 < u < 1,6$.

Partie B

1. Dans la partie A, on a en fait étudié la fonction f_1 .

On a immédiatement : $f_n(0) = \frac{0-n}{0+n} - e^{-0} = -1 - 1 = -2$. Par ailleurs, pour tout x réel strictement positif,

on a : $\frac{x-n}{x+n} = \frac{x(1-\frac{n}{x})}{x(1+\frac{n}{x})} = \frac{1-\frac{n}{x}}{1+\frac{n}{x}}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{x} = 0$, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{n}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{n}{x}) = 1$ et enfin

(division) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{n}{x}}{1+\frac{n}{x}} = 1$. Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-n}{x+n} = 1$.

Par ailleurs, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 - 0 = 1$.

La dérivabilité de f_n se justifie de la même façon que celle de f_1 et on a, pour tout réel positif : $f'_n(x) = \frac{1 \times (x+n) - (x-n) \times 1}{(x+n)^2} - (-1) \times e^{-x} = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x}$.

On a immédiatement : $\forall x \in [0; +\infty[$, $\frac{2}{(x+1)^2} > 0$ et on en déduit comme pour f_1 , que la fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Les éléments précédents nous permettent de dresser le tableau de variation de la fonction f_n :

| | | |
|-----------|----|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $f'_n(x)$ | + | |
| f_n | -2 | 1 |

2. Dans cette question, on va généraliser le résultat obtenu à la question 4 de la partie A.

- (a) On a immédiatement : $f_n(n) = \frac{n-n}{n+n} - e^{-n} = -e^{-n} = -\frac{1}{e^n}$. La fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives, on a : $f_n(n) < 0$.

$$f_n(n) = -\frac{1}{e^n} < 0$$

- (b) Pour $n = 1$, on a : $e^{n+1} = e^{1+1} = e^2$ et $2n + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$. Comme $e^2 \simeq 7,4 > 3$ la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Supposons alors la propriété vraie pour un entier naturel n non nul quelconque fixé. On doit comparer $e^{(n+1)+1}$ et $2(n+1) + 1 = 2n + 3$.

On a : $e^{(n+1)+1} = e \times e^{n+1} > e \times (2n + 1) = 2en + e$ d'après l'hypothèse de récurrence. On a alors : $2en + e - (2n + 3) = 2(e - 1)n + (e - 3)$.

On a, pour tout entier naturel n non nul : $2(e - 1)n + (e - 3) \geq 2(e - 1) + (e - 3) = 3e - 5 > 0$.

On a montré que la propriété était initialisée pour $n = 1$ et héréditaire. On en déduit finalement que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul.

Enfin, pour $n = 0$, on a : $e^{n+1} = e^{0+1} = e$ et $2n + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$. Comme $e > 1$, la propriété est vraie au rang 0.

$$\forall n \in \mathbb{N}, e^{n+1} > 2n + 1$$

- (a) On s'intéresse à l'équation $f_n(x) = 0$.

A la question 1. on a montré que la fonction f_n était strictement croissante pour tout entier naturel n non nul. Par ailleurs, cette fonction étant dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$, elle y est continue.

Par ailleurs, on a vu que l'on avait : $f_n(0) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$.

On déduit de ce qui précède, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, que la fonction f_n définit une bijection de l'intervalle $[0; +\infty[$ dans l'intervalle $[-2; 1[$.

Comme $0 \in [-2; 1[$, on en déduit finalement que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Il convient finalement de montrer que la fonction f_n change de signe entre n et $n + 1$.

On a immédiatement, d'après la question 2. (a) : $f_n(n) = -\frac{1}{e^n} < 0$.

Par ailleurs : $f_n(n + 1) = \frac{n+1-n}{n+1+n} - e^{-(n+1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}}$. D'après la question précédente, on a : $e^{n+1} > 2n + 1$. On tire $\frac{1}{e^{n+1}} < \frac{1}{2n+1}$ puis $-\frac{1}{e^{n+1}} > -\frac{1}{2n+1}$ et, enfin : $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}} > 0$, soit $f_n(n + 1) > 0$.

On a donc : $f_n(n) < 0$ et $f_n(n + 1) > 0$ et en déduit finalement : $u_n \in [n; n + 1]$.

Pour tout entier naturel n non nul, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n appartenant à l'intervalle $[n; n + 1]$.

3. D'après la question 2. on a : $n \leq u_n$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on en déduit (théorème de comparaison) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $n \leq u_n \leq n + 1 \iff \frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n} \iff 1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et on en déduit (théorème des gendarmes) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

Exercice N°4

1. L'objectif de cette question est de déterminer les valeurs des paramètres a et b apparaissant dans l'expression de $f(x)$.

(a) On précise ici d'utiliser le graphique. Ceci ne signifie pas qu'il faille se contenter d'une lecture graphique !

On précise que le point B de coordonnées $(1 ; 2)$ appartient à la courbe \mathcal{C} . On en tire immédiatement : $f(1) = 2$.

On précise que la droite (BC) est tangente à la courbe \mathcal{C} au point B d'abscisse 1. Le coefficient directeur de cette droite est donc égal à $f'(1)$. Les points B et C ayant la même ordonnée, le coefficient directeur de la droite (BC) est nul. On a donc : $f'(1) = 0$.

Finalelement :

$$f(1) = 2 \text{ et } f'(1) = 0$$

(b) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ comme rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et on a, pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \frac{(0+b \times \frac{1}{x}) \times x - (a+b \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{b-a-b \ln x}{x^2}$. On a bien :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{(b-a)-b \ln x}{x^2}$$

(c) On a : $f(1) = \frac{a+b \ln 1}{1} = a$. Or, d'après la question 1 : $f(1) = 2$. On en déduit immédiatement : $a = 2$.

On a par ailleurs, en utilisant le résultat de la question précédente : $f'(1) = \frac{b-a-b \ln(1)}{1^2} = b - a$. Or, à la question 1, on a établi : $f'(1) = 0$. Il vient donc $b - a = 0$, c'est à dire, en tenant compte de $a = 2$: $b = a = 2$.

Finalelement :

$$a = b = 2, \text{ soit : } \forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) = \frac{2+2 \ln x}{x}$$

2. On s'intéresse désormais aux variations de la fonction f .

- (a) En tenant compte des résultats des deux précédentes questions, on a : $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(b-a)-b \ln x}{x^2} = \frac{-2 \ln x}{x^2} = -\ln x \times \frac{2}{x^2}$. Pour tout x réel strictement positif, on a $\frac{2}{x^2} > 0$. On en déduit ainsi immédiatement que :

Le signe de $f'(x)$ est identique à celui de $-\ln x$.

- (b) On a $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \ln x = -\infty$. On en tire immédiatement : $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} (2 + 2 \times \ln x) = -\infty$ puis, par produit : $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} [(2 + 2 \times \ln x) \times \frac{1}{x}] = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = -\infty$.

Pour déterminer la limite en $+\infty$, on utilise : $f(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x}$. On a immédiatement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et, par croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On en déduit finalement (addition) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Remarque : ces résultats sont cohérents avec la représentation graphique fournie.

- (c) Pour pouvoir dresser le tableau de variation de la fonction f , il convient d'en étudier les variations. D'après la question 2.(a), nous savons que le signe de $f'(x)$ est identique à celui de $-\ln(x)$. Il vient donc :
- Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; 1[$, on a $\ln x < 0$ d'où $f'(x) > 0$.
 - $\ln(1) = f'(1) = 0$.
 - Pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a $\ln x > 0$ d'où $f'(x) < 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0; 1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$. Elle admet ainsi un maximum global strict en 1 qui vaut : $f(1) = 2$.

Les éléments précédents nous permettent de dresser le tableau de variation de la fonction f .

| | | | | |
|---------|-----|-----|-----------|-----|
| x | 0 | | $+\infty$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| f | | | | |

3. On s'intéresse maintenant à l'équation $f(x) = 1$.

(a) La fonction f est continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$ en tant que fonction dérivable sur cet intervalle. Elle est donc continue sur l'intervalle $]0; 1]$.

On a vu à la question précédente qu'elle était strictement croissante sur cet intervalle.

Enfin, on a : $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 2$. Or $1 \in]-\infty; 2]$.

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de déduire de ce qui précède :

L'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; 1]$.

(b) Puisque la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$, on cherche l'unique entier n vérifiant : $2 \geq f(n) > 1 > f(n+1)$.

En tabulant la fonction f avec un pas de 1 à partir de 1, on obtient facilement : $1,0438 \simeq f(5) > 1 > f(6) \simeq 0,9306$.

$5 < \beta < 6$

4. Utilisation d'un algorithme.

(a) On obtient :

| | étape 1 | étape 2 | étape 3 | étape 4 | étape 5 |
|---------|---------------|---------------|---------------|----------------|-----------------|
| a | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{16}$ |
| b | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $b - a$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
| m | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{15}{32}$ |

Détaillons un peu le mécanisme de l'algorithme proposé.

Ceci-ci fonctionne par dichotomie (instruction « Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$ »). A chaque étape de la boucle correspondant au « Traitement » la valeur de $f(m)$ est comparée à 1 et suivant le résultat de cette comparaison on modifie telle ou telle borne de l'intervalle contenant le réel α .

Initialement, on part de $[a; b] = [0; 1]$ puisque l'on sait que le réel α appartient à cet intervalle (cf. la question 3.(a)). On évalue alors $m = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$ et $f(m) = f(\frac{1}{2}) \simeq 1,227$. Comme $f(\frac{1}{2}) > 1$, on peut conclure que le réel α appartient en fait à l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$. On met alors à jour la valeur de b (instruction « Sinon Affecter à b la valeur m »). On poursuit de la sorte tant que la longueur de l'intervalle courant est strictement supérieure à 0,1 (test « Tant que $b - a > 0,1$ »).

(b) L'algorithme se termine en affichant les dernières valeurs prises par a et b , à savoir les bornes (respectivement inférieure et supérieure) de l'intervalle contenant α , ayant une longueur inférieure ou égale à 0,1 et obtenu par dichotomie à partir de l'intervalle initial $[0; 1]$.

Les valeurs affichées par l'algorithme sont les bornes de l'intervalle contenant α , ayant une longueur inférieure ou égale à 0,1 et obtenu par dichotomie à partir de l'intervalle initial $[0; 1]$.

- (c) A la question 3.(b), on a vu que l'on avait $\beta \in]5 ; 6[$. On va donc affecter initialement cette fois les valeurs 5 et 6 à a et b respectivement. Ensuite, on doit tenir compte du fait que sur cet intervalle, la fonction f est cette fois strictement décroissante. De fait à l'issue du test « Si $f(m) < 1$ » on doit inverser les rôles joués par a et b .

On obtient le nouvel algorithme (modifications en rouge) :

| | | | | | |
|--|---|---|--|--------------------------------------|------------|
| Variables : | a, b et m sont des nombres réels. | | | | |
| Initialisation : | Affecter à a la valeur 5. Affecter à b la valeur 6. | | | | |
| Traitement : | Tant que $b - a > 0,1$. <table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">Si $f(m) < 1$ alors affecter à b la valeur m.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">Sinon affecter à a la valeur m.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">Fin de Si.</td> </tr> </table> Fin Tant que. | Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$. | Si $f(m) < 1$ alors affecter à b la valeur m . | Sinon affecter à a la valeur m . | Fin de Si. |
| Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$. | | | | | |
| Si $f(m) < 1$ alors affecter à b la valeur m . | | | | | |
| Sinon affecter à a la valeur m . | | | | | |
| Fin de Si. | | | | | |
| Sortie : | Afficher a . Afficher b . | | | | |