

T°S6 & 7
DTL DE MATHÉMATIQUES
26/05/2015
Durée 3h
Calculatrices autorisées

– Exercice 1 – : (6 points)

Pour les questions 1 et 2, donner la bonne réponse, et pour les autres, répondre par V(vrai) ou F(faux).

A faire sur la copie. Aucune justification n'est demandée.

1.

Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

- a. 6 b. 7 c. 10 d. 12

2.

On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0 ; +\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

- a. 0,271 b. 0,135 c. 0,865 d. 0,729

3.

Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Alors :

la courbe \mathcal{C} admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

4.

Pour tout réel x , on pose $F(x) = \int_1^x (2 - t)e^{-t} dt$.

Alors :

$F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel x supérieur

à 1.

5.

Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - i| = |z + 2i|$.

Alors :

(Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

6.

Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Alors :

Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

7.

Soit z un nombre complexe non nul.

Alors :

Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

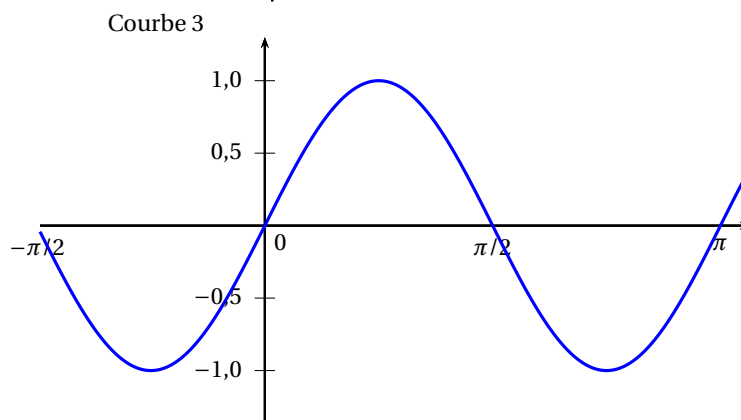
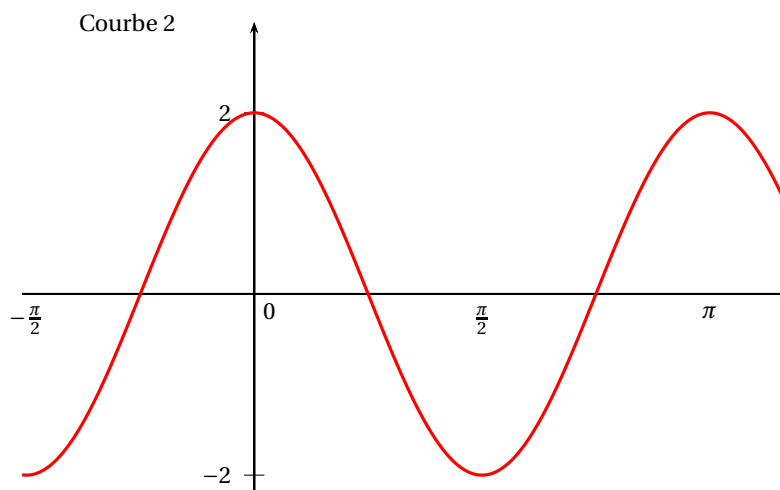
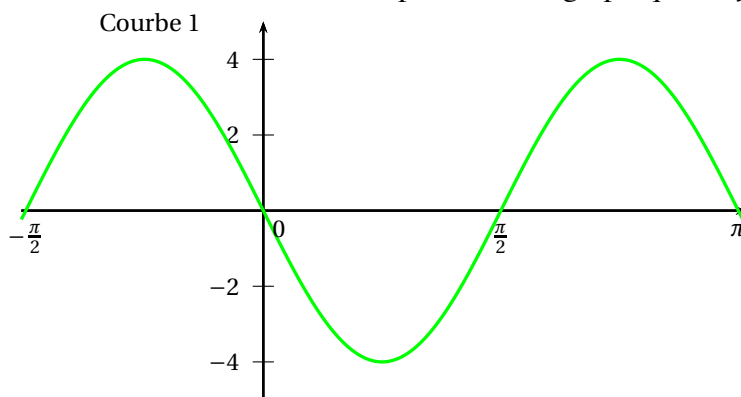
8.

On considère une fonction f , sa dérivée f' et son unique primitive

F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

Alors :

La courbe 3 ci-dessous est la représentation graphique de f .

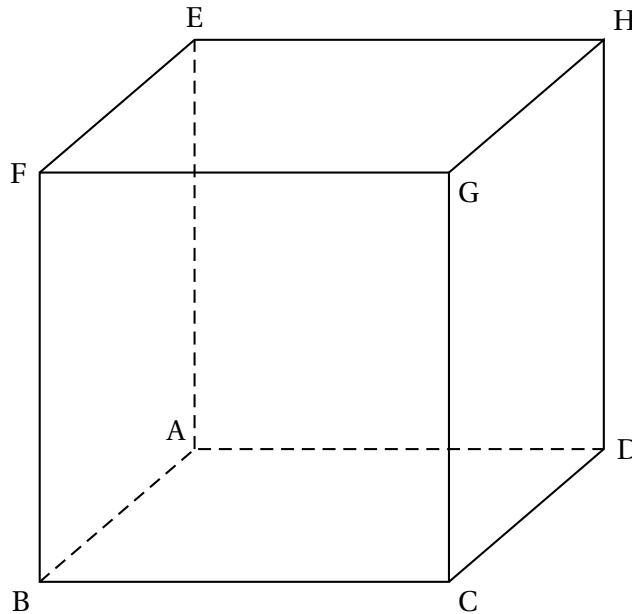


Exercice 2 : (6 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

On considère les points $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $L(a; 1; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
- Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t' \left(a - \frac{3}{4} \right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

- Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

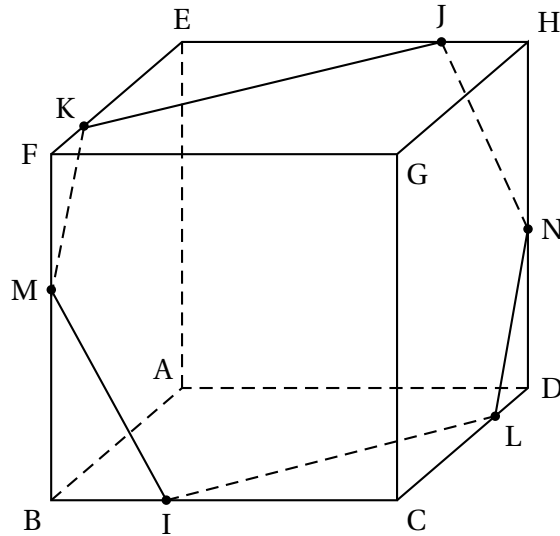
Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$.

- Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

- a. Prouver que le vecteur \vec{n} de coordonnées $(8 ; 9 ; 5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
- b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
- c. En déduire les coordonnées des points M et N

– Exercice 3 – : (8 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

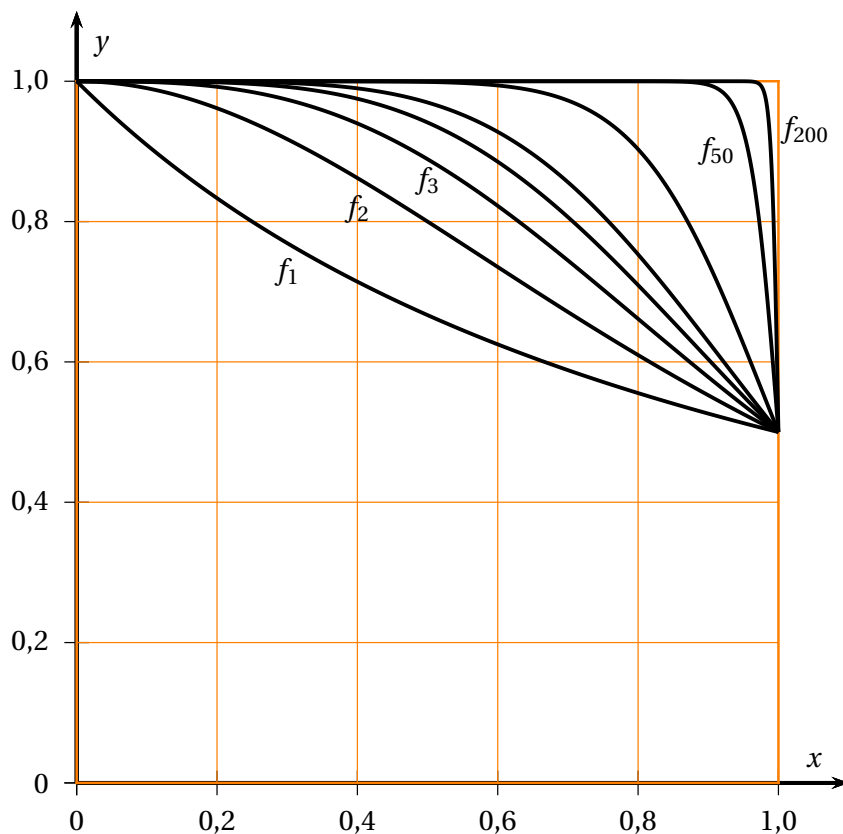
1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1 .
3. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $I_n \leq 1$.



4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1 + x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1 - x^n) dx$.
6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.
7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0
Traitement :	Demander un entier $n \geq 1$ Demander un entier $p \geq 1$ Pour k allant de 0 à $p - 1$ faire : x prend la valeur $\frac{k}{p}$ I prend la valeur $I + \frac{1}{1 + x^n} \times \frac{1}{p}$ Fin Pour Afficher I

- a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.