Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Le barème est donné à titre indicatif.

La calculatrice est autorisée.

CORRIGE

Exercice N°1 (5 points)

Montrer que pour tout entier naturel *n*, $5\times 7^{n+1}-2$ est divisible par 3.

Pour tout entier naturel *n*, on pose :

$$\mathscr{P}_n : « \ 5\times 7^{n+1}-2 \text{ est divisible par 3 } »$$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $5\times 7^{n+1}-2=5\times 7^{0+1}-2=5\times 7^{1}-2=35-2=33$ qui est bien divisible par 3 ($33=3\times 11$).
La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

Hérédité

Soit *N* un entier naturel quelconque fixé. On suppose $\mathscr{P}_N$ vraie. On suppose donc que l'entier $5\times 7^{N+1}-2$ est divisible par 3, c'est-à-dire qu'il existe un entier *k* tel que $5\times 7^{N+1}-2=3k$.

On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie, c'est-à-dire que l'entier $5\times 7^{N+2}-2$ est divisible par 3.

On a : $5\times 7^{N+2}-2=5\times 7\times 7^{N+1}-2$. D'après l'hypothèse de récurrence : $5\times 7^{N+1}=3k+2$.
Donc : $5\times 7^{N+2}-2=5\times 7\times 7^{N+1}-2=7\times(3k+2)-2=21k+14-2=21k+12=3\times(7k+4)$.
Ainsi, l'entier est bien divisible par 3 et la propriété $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie.

Conclusion

La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n* :

$$\forall n\in\mathbb{N}, 5\times 7^{n+1}-2 \text{ est divisible par 3}$$

Exercice N°2 (5 points)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison *r*.

Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$.

Cf. www.panamaths.net.

Exercice N°3 (5 points)

Soit *a* un réel non nul et soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{a} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{a \times n} u_n \end{cases}$$

Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n}{a^n}$.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose :

$$\mathscr{P}_n : « \ u_n = \frac{n}{a^n} \ »$$

<u>Initialisation</u>

Pour $n = 1$, on a : $\dfrac{n}{a^n} = \dfrac{1}{a^1} = \dfrac{1}{a} = u_1$.
La propriété $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit *N* un entier naturel non nul quelconque fixé. On suppose $\mathscr{P}_N$ vraie. On suppose donc que l'on a : $u_N = \dfrac{N}{a^N}$.

On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a : $u_{N+1} = \dfrac{N+1}{a^{N+1}}$.

On a, d'après la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $u_{N+1} = \dfrac{N+1}{a \times N} u_N$.

D'où, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$u_{N+1} = \frac{N+1}{a\times N}u_N = \frac{N+1}{a\times N}\times\frac{N}{a^N} = \frac{(N+1)\times\cancel{N}}{a\times\cancel{N}\times a^N} = \frac{N+1}{a\times a^N} = \frac{N+1}{a^{N+1}}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie.

Conclusion

La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n* non nul :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \frac{n}{a^n}$$

Exercice N°4 (5 points)

Pour tout *n* entier naturel, on cherche à comparer 2^n et n^2.

Pour cela, on définit la suite (u_n) par : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = 2^n - n^2$.

1. A l'aide de votre calculatrice conjecturer le fait que l'on a $u_n > 0$ à partir d'un certain rang que l'on précisera.
2. Démontrer la conjecture précédente.

1. A l'aide de la calculatrice, on obtient facilement la table suivante :

n	$2^n - n^2$
0	1
1	1
2	0
3	–1
4	0
5	7
6	28
7	79
8	192
…	…

   On peut conjecturer que l'on a $u_n > 0$ à partir de $n = 5$.

2. D'après ce qui précède, on pose, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 5 :

$$\mathscr{P}_n : « u_n > 0 »$$

   Comme $u_5 > 0$, $\mathscr{P}_5$ est vraie.

Soit maintenant N un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 5 fixé.
On suppose $\mathscr{P}_N$ vraie, c'est-à-dire $u_N > 0$ soit encore $2^N > N^2$.

On veut montrer que $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a : $2^{N+1} > \left(N+1\right)^2$.

On a d'abord : $2^N > N^2 \Rightarrow 2\times 2^N > 2\times N^2$, c'est-à-dire : $2^{N+1} > 2\times N^2$.
Ensuite : $2\times N^2 - \left(N+1\right)^2 = 2N^2 - N^2 - 2N - 1 = N^2 - 2N - 1 = \left(N-1\right)^2 - 2$.
On a ensuite : $N \geq 5 \Leftrightarrow N-1 \geq 4 \Rightarrow \left(N-1\right)^2 \geq 4^2 \Leftrightarrow \left(N-1\right)^2 - 2 \geq 14 \Rightarrow \left(N-1\right)^2 - 2 > 0$
et donc $2^{N+1} > 2\times N^2 > \left(N+1\right)^2$.
Finalement : $2^{N+1} > \left(N+1\right)^2$.
La propriété $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie.

On a bien : $\forall \in \mathbb{N}, n \geq 5 \Rightarrow 2^n > n^2$.