

**Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Le barème est donné à titre indicatif.**

La calculatrice est autorisée.

CORRIGE

Exercice N°1

On pose, pour tout entier naturel n : \mathcal{P}_n : « $4^n - 1$ est divisible par 3 ».

Initialisation

Pour $n = 0$, on a : $4^0 - 1 = 4^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ qui est bien divisible par 3.

La propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité

Soit N un entier naturel quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_N vraie, c'est-à-dire : $4^N - 1$ est divisible par 3 (hypothèse de récurrence).

On veut montrer que \mathcal{P}_{N+1} est vraie, c'est-à-dire : $4^{N+1} - 1$ est divisible par 3.

On a :

$$4^{N+1} - 1 = 4 \times 4^N - 1 = 4 \times [(4^N - 1) + 1] - 1 = 4 \times (4^N - 1) + 4 - 1 = 4 \times (4^N - 1) + 3$$

D'où, d'après l'hypothèse de récurrence ? $4^N - 1$ est divisible par 3. Il en va donc de même pour $4 \times (4^N - 1)$ puis pour $4 \times (4^N - 1) + 3$.

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{N+1} est vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

$\forall n \in \mathbb{N}, 4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice N°2

Cf. www.panamaths.net ... ☺

Exercice N°3

1. On pose, pour tout entier naturel n : \mathcal{P}_n : « $u_n = 2^{n+1} + 1$ ».

Initialisation

Pour $n = 0$, on a : $u_n = u_0 = 3$ et $2^{n+1} + 1 = 2^{0+1} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$.

Ainsi, on a bien $u_0 = 2^{0+1} + 1$. La propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité

Soit N un entier naturel quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_N vraie, c'est-à-dire : $u_N = 2^{N+1} + 1$ (hypothèse de récurrence).

On veut montrer que \mathcal{P}_{N+1} est vraie, c'est-à-dire : $u_{N+1} = 2^{N+2} + 1$.

Par définition de la suite (u_n) , on a : $u_{N+1} = 2u_N - 1$.

D'où, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{N+1} = 2 \times (2^{N+1} + 1) - 1 = 2 \times 2^{N+1} + 2 - 1 = 2^{N+2} + 1$$

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{N+1} est vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} + 1$

2. On pose, pour tout entier naturel n : \mathcal{P}_n : « $2u_n - v_n = 5$ ».

Initialisation

Pour $n = 0$, on a : $2u_0 - v_0 = 2 \times 3 - 1 = 5$.

La propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité

Soit N un entier naturel quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_N vraie, c'est-à-dire : $2u_N - v_N = 5$ (hypothèse de récurrence).

On veut montrer que \mathcal{P}_{N+1} est vraie, c'est-à-dire : $2u_{N+1} - v_{N+1} = 5$.

Par définition des suites (u_n) et (v_n) , on a :

$$2u_{N+1} - v_{N+1} = 2 \times (2u_N - 1) - (2v_N + 3) = 2 \times 2u_N - 2v_N - 2 - 3 = 2 \times (2u_N - v_N) - 5$$

D'où, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$2u_{N+1} - v_{N+1} = 2 \times (2u_N - v_N) - 5 = 2 \times 5 - 5 = 5$$

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{N+1} est vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n - v_n = 5$$

3. D'après la question précédente, nous avons, pour tout entier naturel n : $v_n = 2u_n - 5$.

Mais d'après la question 1, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} + 1$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2u_n - 5 = 2 \times (2^{n+1} + 1) - 5 = 2 \times 2^{n+1} + 2 - 5 = 2^{n+2} - 3$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^{n+2} - 3$$

Bonus

Pour tout n entier naturel non nul, on pose : $S_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$.

Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul : \mathcal{P}_n : « $S_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq 2 - \frac{1}{n}$ ».

Initialisation

Pour $n = 1$, on a : $S_n = S_1 = \frac{1}{1^3} = 1$ et $2 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{1} = 1$.

Comme $1 \leq 1$, la propriété \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité

Soit N un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_N vraie, c'est-à-dire : $S_N = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{N^3} \leq 2 - \frac{1}{N}$ (hypothèse de récurrence).

On veut montrer que \mathcal{P}_{N+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$S_{N+1} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{N^3} + \frac{1}{(N+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{N+1}$$

On a : $S_{N+1} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{N^3} + \frac{1}{(N+1)^3} = S_N + \frac{1}{(N+1)^3}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence : $S_{N+1} = S_N + \frac{1}{(N+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{N} + \frac{1}{(N+1)^3}$.

Si on a $2 - \frac{1}{N} + \frac{1}{(N+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{N+1}$, alors on pourra conclure.

Pour comparer $2 - \frac{1}{N} + \frac{1}{(N+1)^3}$ et $2 - \frac{1}{N+1}$, nous pouvons nous intéresser à leur différence :

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{N+1} - \left(2 - \frac{1}{N} + \frac{1}{(N+1)^3} \right) &= -\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N} - \frac{1}{(N+1)^3} \\ &= \frac{-N(N+1)^2 + (N+1)^3 - N}{N(N+1)^3} \\ &= \frac{(N+1)^2[-N + (N+1)] - N}{N(N+1)^3} \\ &= \frac{(N+1)^2 - N}{N(N+1)^3} \\ &= \frac{N^2 + N + 1}{N(N+1)^3} \end{aligned}$$

Le polynôme $x^2 + x + 1$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} (son discriminant est négatif) ni, à fortiori, sur \mathbb{N}^* . Il prend des valeurs strictement positives (le coefficient de « x^2 » est strictement

positif). On en déduit : $\frac{N^2 + N + 1}{N(N+1)^3} > 0$. Et donc : $2 - \frac{1}{N} + \frac{1}{(N+1)^3} < 2 - \frac{1}{N+1}$.

Ainsi, on a : $S_{N+1} = S_N + \frac{1}{(N+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{N} + \frac{1}{(N+1)^3} < 2 - \frac{1}{N+1}$.

D'où : $S_{N+1} \leq 2 - \frac{1}{N+1}$.

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{N+1} est vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq 2 - \frac{1}{n}$$