Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Le barème est donné à titre indicatif.

La calculatrice est autorisée.

Exercice N°1 (4 points)

Montrer que pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice N°2 (6 points)

Pour tout n entier naturel non nul, on pose :

$$S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \dots + n\times(n+1)$$

Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \dfrac{n\times(n+1)\times(n+2)}{3}$.

Exercice N°3 (10 points)

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n + 3 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2^{n+1} + 1$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $2u_n - v_n = 5$.
3. Déduire des questions précédentes l'expression de v_n pour tout entier naturel n.

Bonus

Pour tout n entier naturel non nul, on pose : $S_n = \dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \dots + \dfrac{1}{n^3}$.

Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$