« *Une fois qu'on a passé les bornes, il n'y a plus de limites.* »
Alphonse ALLAIS

« *Plonge dans l'étonnement et la stupéfaction sans limites,*
ainsi tu peux être sans limites, ainsi tu peux être infiniment. »
Eugène IONESCO

Corrigé

Exercice N°1

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

On peut mener le calcul de diverses façons. Par exemple, pour tout *x* différent de 2, on a, en utilisant l'expression conjuguée du numérateur :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} &= \frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{\sqrt{x+2}^2-2^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\\ &= \frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\end{aligned}$$

Comme : $\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$ et $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=\sqrt{4}=2$, on a : $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+2}=2$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

On pouvait également identifier dans la limite demandée le taux d'accroissement de la fonction $f : x\mapsto\sqrt{x+2}$ en 2. On a facilement : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ et donc :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2+2}}=\frac{1}{4}$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{1}{4}}$$

Le numérateur de l'expression $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ doit nous faire penser à la limite que nous venons de calculer ! On constate de surcroît que le dénominateur s'annule également pour $x=2$. On peut donc se « ramener » à la situation précédente comme suit :

$$\forall x \neq 2,\ \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}}{\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}}$$

On a déjà : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \dfrac{1}{4}$.

Par ailleurs, en procédant comme ci-dessus, on obtient : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \dfrac{1}{6}$.

D'où (rapport) : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

$$\boxed{\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{3}{2}}$$

2. Pour tout x réel non nul, on a : $-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1 \quad (\mathrm{E})$.

Pour tout réel x <u>strictement positif</u>, (E) donne alors : $-x \leq x\sin\dfrac{1}{x} \leq x$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-x) = 0$, le théorème des gendarmes nous permet de conclure :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x\sin\frac{1}{x} \right) = 0$$

Pour tout réel x <u>strictement négatif</u>, (E) donne : $-x \geq x\sin\dfrac{1}{x} \geq x$.

Comme : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-x) = 0$, le théorème des gendarmes nous donne :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(x\sin\frac{1}{x} \right) = 0$$

Comme : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x\sin\dfrac{1}{x} \right) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(x\sin\dfrac{1}{x} \right) = 0$, on a finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \left(x\sin\frac{1}{x} \right) = 0}$$

3. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$.

On en déduit immédiatement (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}=0$.

On a par ailleurs : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Le coup de pouce suggère de factoriser $\frac{x^2+x+1}{x^3+2}$. Comme nous travaillons en $+\infty$, nous factorisons par les termes de plus haut degré.

Pour tout réel x non nul, on a : $\frac{x^2+x+1}{x^3+2}=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{1}{x}\times\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^3}}$.

Il vient alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{x^2+x+1}{x^3+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\times\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^3}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\times\frac{1+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$.

On a immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et (cf. le cours) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

On en déduit (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$ et (produit) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\times\frac{1+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=1$.

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{x^2+x+1}{x^3+2}}=1}$$

Exercice N°2

Le théorème du cours sur la limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle nous permet d'écrire immédiatement :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^n+1}{5x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^n}{5x^3}$$

On a alors immédiatement :

- Si $n > 3$, $x \mapsto x^{n-3}$ est une fonction polynôme et on doit distinguer deux sous-cas :
  - Si $n-3$ est pair, c'est-à-dire <u>n impair supérieur ou égal à 5</u>, on a :

    $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n-3} = +\infty$ puis : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^n+1}{5x^3-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{3}{5}x^{n-3}\right) = \boxed{-\infty}$.
  - Si $n-3$ est impair, c'est-à-dire <u>n pair supérieur ou égal à 4</u>, on a cette fois :

    $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n-3} = -\infty$ puis : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^n+1}{5x^3-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{3}{5}x^{n-3}\right) = \boxed{+\infty}$.
- Si $n = 3$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^n+1}{5x^3-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^n}{5x^3} = \boxed{-\dfrac{3}{5}}$.
- Si $n < 3$, $x \mapsto x^{3-n}$ est une fonction polynôme et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{3-n}} = 0$.

  Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^n+1}{5x^3-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^n}{5x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3}{5x^{3-n}} = \boxed{0}$.

Exercice N°3

On considère la fonction *f* définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2-3x+1}$$

1. La fonction *f* est définie pour toute valeur de *x* telle que $x^2-3x+1 \geq 0$.
   Le discriminant associé vaut : $\delta = (-3)^2 - 4\times1\times1 = 9-4 = 5$. On en déduit que le trinôme x^2-3x+1 s'annule pour les deux réels : $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   On a alors, le coefficient de x^2 étant strictement positif :

   $$x^2-3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right[$$

   Finalement :

   $$\boxed{\mathscr{D}_f = \left]-\infty\,;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right[}$$

2. La fonction *f* est la composée des fonctions $x \mapsto x^2-3x+1$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.
   On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3x+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ donc, par composition :

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+1} = +\infty}$$

3. On s'intéresse à : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right]$.

Pour tout réel x supérieur à $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x)-\left(x-\frac{3}{2}\right) &= \sqrt{x^2-3x+1}-\left(x-\frac{3}{2}\right)\\
&= \frac{\left[\sqrt{x^2-3x+1}-\left(x-\frac{3}{2}\right)\right]\times\left[\sqrt{x^2-3x+1}+\left(x-\frac{3}{2}\right)\right]}{\sqrt{x^2-3x+1}+\left(x-\frac{3}{2}\right)}\\
&= \frac{\left(x^2-3x+1\right)-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2-3x+1}+x-\frac{3}{2}} = \frac{x^2-3x+1-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)}{\sqrt{x^2-3x+1}+x-\frac{3}{2}}\\
&= \frac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{x^2-3x+1}+x-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

On a vu que l'on avait : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+1}=+\infty$.

Par ailleurs, on a immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{3}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

On en tire (somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}+x-\frac{3}{2}\right)=+\infty$, puis : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{x^2-3x+1}+x-\frac{3}{2}}=0$.

On a ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x-\frac{3}{2}\right)\right]=0$, soit :

> La droite Δ d'équation $y=x-\frac{3}{2}$ est asymptote en $+\infty$
> à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère.

4. On s'intéresse cette fois au signe de $f(x)-\left(x-\frac{3}{2}\right)$.

   D'après la question précédente, on a :

$$f(x)-\left(x-\frac{3}{2}\right)=\sqrt{x^2-3x+1}-\left(x-\frac{3}{2}\right)=\frac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{x^2-3x+1}+x-\frac{3}{2}}$$

Pour $x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, on a : $x-\frac{3}{2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2} > 0$. On en déduit alors : $\sqrt{x^2-3x+1}+x-\frac{3}{2} > 0$ et,

enfin : $\dfrac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{x^2-3x+1}+x-\frac{3}{2}} < 0$.

Dans ce cas, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située sous la droite Δ.

Pour $x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, on a : $x-\frac{3}{2} \leq \frac{-\sqrt{5}}{2} < 0$. On en déduit alors : $\sqrt{x^2-3x+1}-\left(x-\frac{3}{2}\right) > 0$.

Dans ce cas, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la droite Δ.

Conclusion :

- Sur l'intervalle $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située sous la droite Δ.
- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la droite Δ.

A titre de complément, nous fournissons sur le graphique ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction *f* et son asymptote Δ en $+\infty$.