

Corrigé

Exercice N°1 (4 points)

Question de cours.

On rappelle un théorème de comparaison :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

Si on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ **alors** $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Démontrer le théorème ci-dessus.

Cf. le cours.

Exercice N°2 (9 points)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes :

$$u_n = -3n^2 + 2\sqrt{n} - 11 \qquad v_n = 4 \times (-1)^n + \frac{\sqrt{n}}{13} \qquad w_n = \frac{-n^2 - \cos(5n)}{n^3 + 2}$$

On a immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^2) = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt{n}) = +\infty$.

Nous avons donc affaire dans un premier temps à une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = -3n^2 + 2\sqrt{n} - 11 = -3n^2 \times \left(1 + \frac{2\sqrt{n}}{-3n^2} - \frac{11}{-3n^2} \right) = -3n^2 \times \left(1 - \frac{2}{3n\sqrt{n}} + \frac{11}{3n^2} \right)$$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} = +\infty$.

Il vient alors :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3n\sqrt{n}} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11}{3n^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3n\sqrt{n}} + \frac{11}{3n^2} \right) = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^2) = -\infty \\ \text{multiplication} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-3n^2 \times \left(1 - \frac{2}{3n\sqrt{n}} + \frac{11}{3n^2} \right) \right] = -\infty$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Pour tout entier naturel n , on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} -1 &\leq (-1)^n \leq 1 \\ \Leftrightarrow -4 &\leq 4 \times (-1)^n \leq 4 \\ \Leftrightarrow -4 + \frac{\sqrt{n}}{13} &\leq 4 \times (-1)^n + \frac{\sqrt{n}}{13} \leq 4 + \frac{\sqrt{n}}{13} \\ \Leftrightarrow -4 + \frac{\sqrt{n}}{13} &\leq v_n \leq 4 + \frac{\sqrt{n}}{13} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-4 + \frac{\sqrt{n}}{13} \right) = +\infty$.

On en déduit finalement (théorème de comparaison) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

Au numérateur, on a $-1 \leq \cos(5n) \leq 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2) = -\infty$.

On a ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2 - \cos(5n)) = -\infty$.

Au dénominateur, on a immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 + 2) = +\infty$.

Finalement, nous avons affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$w_n = \frac{-n^2 \left(1 + \frac{-\cos(5n)}{-n^2} \right)}{n^3 \left(1 + \frac{2}{n^3} \right)} = -\frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{\cos(5n)}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^3}}$$

On a : $-1 \leq \cos(5n) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{n^2} \leq \frac{\cos(5n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, le théorème

des gendarmes nous donne immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(5n)}{n^2} = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\cos(5n)}{n^2} \right) = 1$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^3} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3} \right) = 1$.

D'où :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\cos(5n)}{n^2} \right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n^3} \right) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{division} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\cos(5n)}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^3}} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{\cos(5n)}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^3}} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

Exercice N°3 (7 points)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{5n}{n+1} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 (on donnera les valeurs sous forme de fractions irréductibles).

On a :

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{5 \times 1}{1+1} \times 5 = \frac{25}{2}, \quad u_3 = u_{2+1} = \frac{5 \times 2}{2+1} \times \frac{25}{2} = \frac{5 \times 25}{3} = \frac{125}{3}$$

$$\text{et } u_4 = u_{3+1} = \frac{5 \times 3}{3+1} \times \frac{125}{3} = \frac{5 \times 125}{4} = \frac{625}{4}$$

$$u_2 = \frac{25}{2}, \quad u_3 = \frac{125}{3} \quad \text{et} \quad u_4 = \frac{625}{4}$$

2. Montrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{5^n}{n}$.

Pour tout n entier naturel non nul, on pose : \mathcal{P}_n : « $u_n = \frac{5^n}{n}$ ».

Initialisation

Pour $n = 1$, on a, par définition de la suite (u_n) : $u_1 = 5$.

Par ailleurs : $\frac{5^n}{n} = \frac{5^1}{1} = 5$.

La propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

La question 1 nous permet de remarquer que les propriétés \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_3 et \mathcal{P}_4 sont également vraies.

Hérédité

Soit N un entier naturel non nul quelconque fixé.

Supposons que la propriété \mathcal{P}_N soit vraie, c'est-à-dire : $u_N = \frac{5^N}{N}$.

On veut montrer que \mathcal{P}_{N+1} est vraie, c'est-à-dire : $u_{N+1} = \frac{5^{N+1}}{N+1}$.

D'après la définition de la suite (u_n) , on a : $u_{N+1} = \frac{5N}{N+1}u_N$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence il vient alors :

$$u_{N+1} = \frac{5N}{N+1}u_N = \frac{5N}{N+1} \times \frac{5^N}{N} = \frac{5 \times 5^N}{N+1} = \frac{5^{N+1}}{N+1}$$

La propriété \mathcal{P}_{N+1} est donc vraie.

Conclusions

La propriété est initialisée à $n = 1$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{5^n}{n}$$

3. Montrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{n+1}{5}$.

Pour tout n entier naturel non nul, on pose : \mathcal{P}_n : « $u_n \geq \frac{n+1}{5}$ ».

Initialisation

Pour $n = 1$, on a, par définition de la suite (u_n) : $u_1 = 5$.

Par ailleurs : $\frac{n+1}{5} = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5}$.

Comme $5 \geq \frac{2}{5}$, la propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

Hérédité

Soit N un entier naturel non nul quelconque fixé.

Supposons que la propriété \mathcal{P}_N soit vraie, c'est-à-dire : $u_N \geq \frac{N+1}{5}$.

On veut montrer que \mathcal{P}_{N+1} est vraie, c'est-à-dire : $u_{N+1} \geq \frac{N+1+1}{5} = \frac{N+2}{5}$.

D'après la définition de la suite (u_n) , on a : $u_{N+1} = \frac{5N}{N+1}u_N$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence il vient alors :

$$u_{N+1} = \frac{5N}{N+1}u_N \geq \frac{5N}{N+1} \times \frac{N+1}{5} = N$$

A-t-on $N \geq \frac{N+2}{5}$?

On a : $N \geq \frac{N+2}{5} \Leftrightarrow 5N \geq N+2 \Leftrightarrow 4N \geq 2 \Leftrightarrow 2N \geq 1 \Leftrightarrow N \geq \frac{1}{2}$.

Comme $N \geq 1$, on a bien : $N \geq \frac{N+2}{5}$ et on en déduit finalement : $u_{N+1} \geq N \geq \frac{N+2}{5}$.

La propriété \mathcal{P}_{N+1} est donc vraie.

Conclusions

La propriété est initialisée à $n = 1$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{n+1}{5}$$

4. Déduire de la question précédente la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On a immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{5} = +\infty$ et donc, par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$