

**Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Le barème est donné à titre indicatif.**

La calculatrice est autorisée.

Exercice N°1 (4 points)

Question de cours.

On rappelle un théorème de comparaison :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

Si on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Démontrer le théorème ci-dessus.

Exercice N°2 (9 points)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes :

$$u_n = -3n^2 + 2\sqrt{n} - 11 \qquad v_n = 4 \times (-1)^n + \frac{\sqrt{n}}{13} \qquad w_n = \frac{-n^2 - \cos(5n)}{n^3 + 2}$$

Exercice N°3 (7 points)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{5n}{n+1} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 (on donnera les valeurs sous forme de fractions irréductibles).
2. Montrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{5^n}{n}$.
3. Montrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{n+1}{5}$.
4. Dédurre de la question précédente la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.