Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Le barème est donné à titre indicatif.

La calculatrice est autorisée.

CORRIGE

Exercice N°1 (3 points)

Pour tout entier naturel *n*, on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, d'où : $2n^2 - 1 \leq 2n^2 + (-1)^n \leq 2n^2 + 1$ puis, $3n^2 + 1$ étant supérieur ou égal à 1 et donc strictement positif :

$$\frac{2n^2-1}{3n^2+1} \leq \frac{2n^2+(-1)^n}{3n^2+1} \leq \frac{2n^2+1}{3n^2+1}$$

C'est-à-dire : $\frac{2n^2-1}{3n^2+1} \leq u_n \leq \frac{2n^2+1}{3n^2+1}$.

Pour tout *n* entier naturel non nul, on a :

$$\frac{2n^2-1}{3n^2+1} = \frac{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right) = 2-0 = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{1}{n^2}\right) = 3+0 = 3$.

D'où (rapport) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2-1}{3n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}$.

De façon analogue, on montre que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+1} = \frac{2}{3}$.

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

Pour déterminer la limite de la suite (v_n), on peut procéder comme précédemment (la présence de $-5n$ au numérateur de la fraction ne change pas grand-chose …) ou remarquer que l'on a, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{2n^2-5n+(-1)^n}{3n^2+1} = \frac{2n^2+(-1)^n}{3n^2+1} + \frac{-5n}{3n^2+1} = u_n + \frac{-5n}{3n^2+1}$$

Puisque nous connaissons la limite de la suite (u_n), il nous reste à déterminer celle de la suite $\left(\frac{-5n}{3n^2+1}\right)$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{-5n}{3n^2+1} = \frac{-5n}{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{-5}{n\left(3+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\times\frac{-5}{3+\frac{1}{n^2}}$.

On a classiquement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$. On a également vu que l'on avait : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{1}{n^2}\right)=3$. On en déduit (rapport) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-5}{3+\frac{1}{n^2}}=\frac{-5}{3}$ puis (produit) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\times\frac{-5}{3+\frac{1}{n^2}}\right)=0\times\frac{-5}{3}=0$.

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-5n}{3n^2+1}=0$.

Il vient enfin (somme) : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n+\frac{-5n}{3n^2+1}\right)=\frac{2}{3}+0=\frac{2}{3}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{2}{3}}$$

Exercice N°2 (7 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1 \end{cases}$$

1. On obtient facilement :

$$\boxed{u_1 = 1,\ u_2 = 3,\ u_3 = 13 \text{ et } u_4 = 183.}$$

2. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n + 1 - u_n = u_n^2 + 1$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \geq 0$ et donc $u_n^2 + 1 \geq 1 > 0$.
Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$.
On a bien :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

3. Pour tout entier naturel *n*, on pose : $\mathscr{P}_n$: « $u_n \geq n-1$ ».

<u>Initialisation</u>
Pour $n=0$, on a : $u_0 = -1$ et $n-1 = 0-1 = -1$.
Comme $-1 \geq -1$, on a $u_0 \geq 0-1$ et on en déduit que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u>
Soit *N* un entier naturel quelconque fixé. On suppose $\mathscr{P}_N$ vraie, c'est-à-dire : $u_N \geq N-1$.
On s'intéresse à $\mathscr{P}_{N+1}$. On veut montrer : $u_{N+1} \geq (N+1)-1$, soit $u_{N+1} \geq N$.

On a : $u_N \geq N-1$ (hypothèse de récurrence) et donc : $u_n^2 + u_N \geq u_n^2 + N - 1$, puis :
$u_n^2 + u_N + 1 \geq u_n^2 + N$. Soit : $u_{N+1} \geq u_n^2 + N$.
Comme $u_n^2 \geq 0$, il vient : $u_n^2 + N \geq N$.
De $u_{N+1} \geq u_n^2 + N$ et $u_n^2 + N \geq N$, on tire immédiatement : $u_{N+1} \geq N$.
La propriété $\mathscr{P}_{N+1}$ est donc vraie.

<u>Conclusion</u>
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n-1}$$

4. On a immédiatement $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$ et, en utilisant le résultat de la question précédente, le théorème de comparaison (minoration) nous permet de conclure : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

5. La valeur initiale de la variable N est 0, c'est le rang du premier terme de la suite (u_n).
La valeur initiale de la variable N est -1. C'est la valeur de u_0.
A partir de là, la boucle « Tant que » permet de calculer les termes suivant de la suite (u_n) tant que la valeur courante est inférieure ou égale à 100.
Dès que cette valeur est dépassée, la condition « $\text{U} \leq 100$ » n'est plus satisfaite et on affiche la valeur courante de N.

En d'autres termes :

L'algorithme affiche le rang du premier terme de la suite dont la valeur est strictement supérieure à 100.

D'après la première question, on a : $u_3 = 13$ et $u_4 = 183$. Le terme u_4 est donc le premier terme de la suite dont la valeur est strictement supérieure à 100. L'algorithme fournira donc la valeur 4.

L'algorithme fournira la valeur 4.

Variables
  N est un entier naturel
  U est un réel
  A est un réel
Début
  N prend la valeur 0
  U prend la valeur -1
  Lire A
  Tant que $U \leq A$
    U prend la valeur $U^2 + U + 1$
    N prend la valeur $N + 1$
  Fin TantQue
  Afficher N
Fin

6. Dans cette question, A joue le rôle de « 100 » dans l'algorithme initial. Encore faut-il définir et attribuer une valeur à A !

   Il convenait donc de déclarer A (en tant que réel à priori) et d'en demander la valeur à l'utilisateur (ligne « Lire A »).

   Enfin, le test « $U \leq 100$ » devait être remplacé par le test « $U \leq A$ ». L'algorithme modifié (les modifications apparaissent en rouge) est fourni ci-contre.