Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Le barème est donné à titre indicatif.

La calculatrice est autorisée.

Exercice N°1 (3 points)

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{2n^2 + (-1)^n}{3n^2+1}$ et $v_n = \dfrac{2n^2 - 5n + (-1)^n}{3n^2+1}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice N°2 (7 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1 \end{cases}$$

1. En vous aidant de votre calculatrice, donner u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
3. Démontrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n-1$.
4. Déduire de la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables
    N est un entier naturel
    U est un réel
Début
    N prend la valeur 0
    U prend la valeur -1
    Tant que $\mathrm{U} \leq 100$
        U prend la valeur $\mathrm{U}^2 + \mathrm{U} + 1$
        N prend la valeur $\mathrm{N}+1$
    Fin TantQue
    Afficher N
Fin

5. Que fait cet algorithme ? Quelle valeur fournit-il ?
6. Comment le modifier pour qu'il fournisse, pour un réel A quelconque, le plus petit rang N à partir duquel on a $u_n > \mathrm{A}$?