« *C'est justement pour préserver ce qui est neuf et révolutionnaire dans chaque enfant que l'éducation doit être conservatrice, c'est-à-dire assurer "la continuité du monde".* »
Hannah ARENDT – La responsabilité.

La calculatrice est autorisée.

CORRIGE

Exercice N°1 (8 points)

On considère la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2 - \frac{x^2}{2} - \cos x$$

On rappelle que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives les fonctions : $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto -\sin x$.

1. Montrer que pour tout *x* réel, on a : $g''(x) = -1 + \cos x$.
   En déduire le sens de variation de la dérivée g' de la fonction *g*.

La fonction $x \mapsto 2 - \frac{x^2}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. La fonction $x \mapsto -\cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme opposée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout *x* réel on a alors :

$$g'(x) = 0 - 2 \times \frac{x}{2} - (-\sin x) = -x + \sin x$$

La fonction g' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle : la fonction polynôme $x \mapsto -x$ et la fonction sinus. Pour tout réel *x*, on a alors :

$$\boxed{g''(x) = -1 + \cos x}$$

Pour tout *x* réel, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$, d'où : $-2 \leq -1\cos x \leq 0$. Par ailleurs, la fonction g'' ne s'annule qu'aux points $x_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). On en déduit finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } g' \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

2. En notant que l'on a $g'(0)=0$, déduire de la question précédente le signe de la fonction g' sur $\mathbb{R}$ puis les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

On a immédiatement : $g'(0)=-0+\sin 0=0$. Comme la fonction g' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit immédiatement :

a. Si $x<0$, on a : $g'(x)>0$;
b. Si $x>0$, on a : $g'(x)<0$.

On en déduit alors :

La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. Démontrer que l'équation $g(x)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$ (cf. la question 1.). Par ailleurs, d'après la question précédente, elle est strictement décroissante sur cet intervalle.
On a aussi : $g(0)=2-\frac{0^2}{2}-\cos 0=2-1=1>\frac{1}{2}$.
Enfin, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{x^2}{2}-\cos x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{x^2}\right)\right]$.
On a classiquement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$.
Comme $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, -1\leq\cos x\leq 1$, on aussi : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, -\frac{1}{x^2}\leq\frac{\cos x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$.
Et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, le théorème des gendarmes nous permet de conclure : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0$. Puis (somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}$.
Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$, il vient finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{x^2}\right)\right]=-\infty$.

Le théorème de la bijection nous permet alors de conclure :

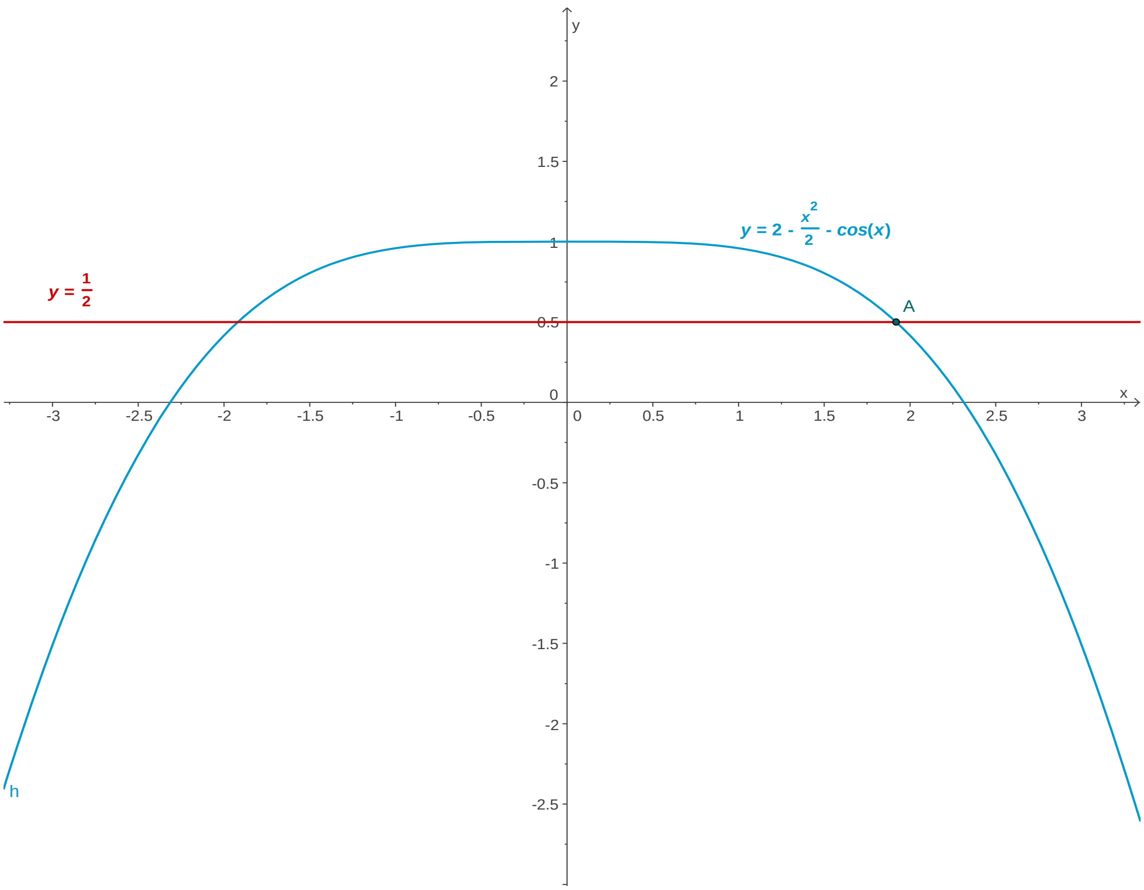
L'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$.

4. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} (on détaillera la démarche).

En tabulant la fonction h avec un pas égale à 1, on obtient : $1<\alpha<2$.
En la tabulant ensuite avec un pas égal à 10^{-1}, on obtient : $1,9<\alpha<2,0$.
En la tabulant enfin avec un pas égal à 10^{-1}, on obtient :

$$\boxed{1,91<\alpha<1,92}$$

A titre de complément, nous fournissons la courbe représentative de la fonction h :



Exercice N°2 (12 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{-1;1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

1. Pourquoi la fonction *f* est-elle continue sur $\mathscr{D}$?

La fonction *f* est une fonction rationnelle. A ce titre elle est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition. Elle est continue, en particulier, sur $]-\infty;-1[$, $]-1;+1[$ et sur $]+1;+\infty[$.

2. Montrer que pour tout *x* de $\mathscr{D}$, on a : $f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$ où $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

La fonction *f* est dérivable, en tant que fonction rationnelle, sur tout intervalle de son ensemble de définition. Pour tout *x* de $\mathscr{D}$, on a donc :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2\times 2x)(x^2-1) - (x^3+2x^2)\times 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 \cancel{+4x^3} - 4x - 2x^4 \cancel{-4x^3}}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2-1)^2} = \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

où $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

3. Etudier les variations de la fonction *g* et en donner le tableau de variation.

La fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ (nous l'étudions sur cet ensemble même si, au niveau de la fonction dérivée f' les valeurs -1 et 1 devront être écartées).

On a d'abord :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 3x - 4) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3 - 3x - 4) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) = +\infty$$

La fonction *g* est dérivable en tant que fonction polynôme et on a, pour tout *x* réel :

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

On note que les deux valeurs qui annulent g' sont les deux valeurs interdites de la fonction *f* :

a. Pour tout *x* réel de $]-\infty;-1[\cup]+1;+\infty[$, on a : $g'(x)>0$ et la fonction *g* est strictement croissante.

b. Pour tout *x* réel de $]-1;+1[$, on a : $g'(x)<0$ et la fonction *g* est strictement décroissante.

$$g(-1)=(-1)^3-3\times(-1)-4=-1+3-4=-2$$
$$g(1)=1^3-3\times1-4=1-3-4=-6$$

Les éléments précédents nous permettent de donner le tableau de variation de *g* :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

4. Montrer que la fonction *g* s'annule pour un unique réel que l'on notera β.

La fonction *g* est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1;+1]$. Elle admet donc un maximum en -1. Or, $g(-1)=-2$. On en déduit que pour tout réel *x* de l'intervalle $]-\infty;+1]$, on a :

$$g(x)\leq g(-1)<0$$

La fonction *g* ne s'annule donc pas sur l'intervalle $]-\infty;+1]$.

Sur l'intervalle $[+1;+\infty[$ la fonction *g* est continue et strictement croissante.
On a : $g(1)=-6$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc dans l'intervalle $]+1;+\infty[$ un unique réel β tel que $g(\beta)=0$.

5. Déduire de ce qui précède le signe de *g* sur $\mathscr{D}$.

On a vu que la fonction *g* prenait des valeurs strictement négatives sur l'intervalle $]-\infty;+1]$.

Par ailleurs, sur l'intervalle $[+1;+\infty[$, la fonction g est strictement croissante et s'annule en une seule valeur : β. On en déduit :

- Sur $[+1\,;\,\beta[$, la fonction g prend des valeurs strictement négatives ;
- Sur $]\beta\,;+\infty[$, la fonction g prend des valeurs strictement positives.

En définitive :

- Sur $]-\infty\,;\,\beta[$, la fonction g prend des valeurs strictement négatives ;
- Sur $]\beta\,;+\infty[$, la fonction g prend des valeurs strictement positives ;
- $g(\beta)=0$.

6. Dresser le tableau de variation de *f* (on ne donnera pas de valeur approchée de $f(\beta)$).

Dans un premier temps, nous allons déterminer les limites de *f* aux bornes de l'ensemble $\mathcal{D}$, c'est-à-dire en $-\infty$, -1 (à gauche et à droite), en 1 (à gauche et à droite) et en $+\infty$.

La fonction *f* étant rationnelle, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty} x\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\boxed{-\infty}$$

Et, de façon similaire :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty} x\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\boxed{+\infty}$$

Déterminons maintenant : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$.

On a, pour tout *x* réel de $\mathcal{D}$: $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}=\dfrac{x^2(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}\times\dfrac{x^2(x+2)}{x-1}$.

Classiquement : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2(x+2)}{x-1}=\dfrac{(-1)^2\times(-1+2)}{-1-1}=\dfrac{1}{-2}$.

Finalement (multiplication) :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=+\infty} \text{ et } \boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty}$$

On procède de façon similaire pour déterminer : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$.

On a cette fois, pour tout x réel de $\mathscr{D}$: $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{x^2(x+2)}{x+1}$.

Classiquement : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2(x+2)}{x+1}=\dfrac{1^2\times(1+2)}{1+1}=\dfrac{3}{2}$.

Finalement (multiplication) :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty} \text{ et } \boxed{\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty}$$

La question précédente nous a permis de déterminer le signe de la fonction g pour tout réel x. Nous allons maintenant pouvoir donner celui de la dérivée f' de la fonction f.

En effet, nous avons vu à la question 2 que nous avions, pour tout x de $\mathscr{D}$:

$$f'(x)=\frac{xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x\left(x^3-3x-4\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Le dénominateur étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui du produit $xg(x)$.

On a immédiatement le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		0		1		β		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

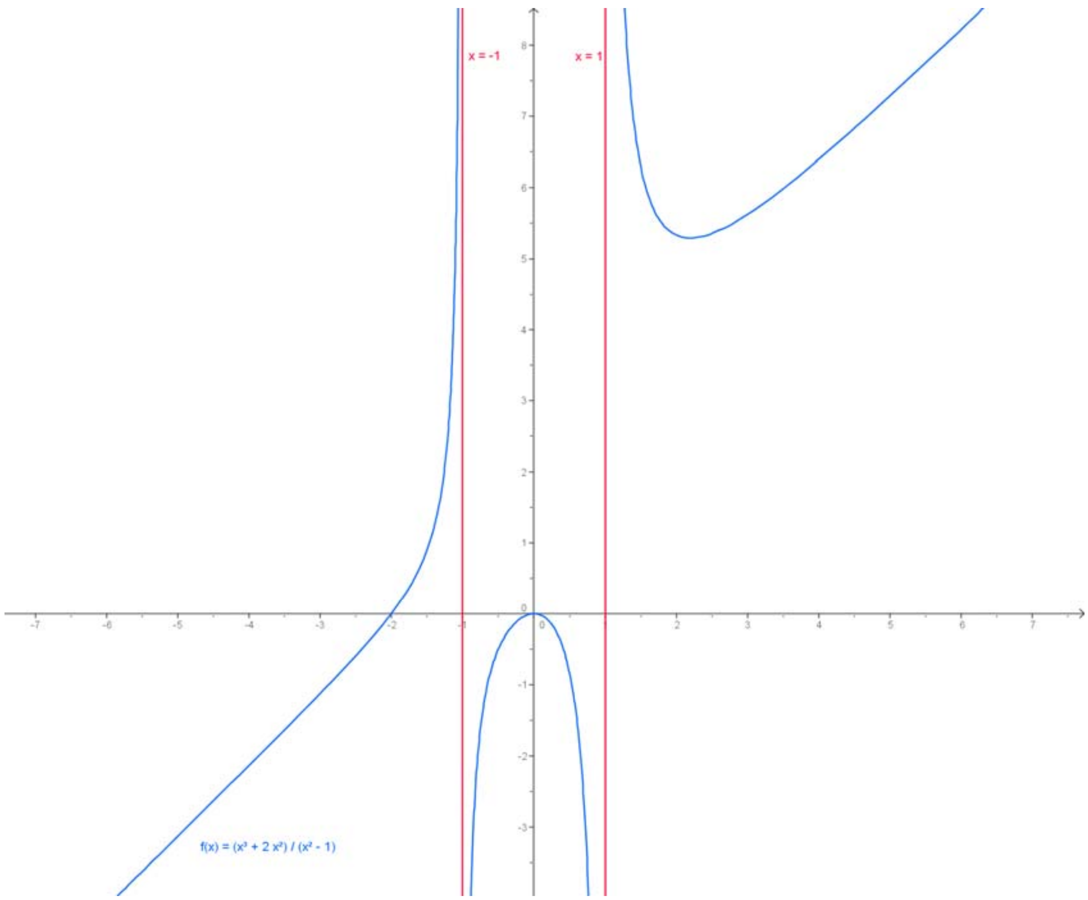
Les éléments précédents nous permettent maintenant de donner le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		0		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\beta)$	↗	$+\infty$

7. Donner, suivant la valeur du réel *k*, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ (aucune justification n'est attendue).

La discussion (pas de justification demandée) peut être menée à partir du tableau de variation ou en s'aidant de la calculatrice.

Dans cette perspective, nous fournissons ci-dessous une représentation graphique de la fonction *f* (en bleu) :



Il vient alors :

- Si $k<0$ → 3 solutions ;
- Si $k=0$ → 2 solutions ;
- Si $0<k<f(\beta)$ → 1 solution ;
- Si $k=f(\beta)$ → 2 solutions ;
- Si $k>f(\beta)$ → 3 solutions.