« *C'est justement pour préserver ce qui est neuf et révolutionnaire dans chaque enfant que l'éducation doit être conservatrice, c'est-à-dire assurer "la continuité du monde".* »
Hannah ARENDT – La responsabilité.

La calculatrice est autorisée.

Exercice N°1 (8 points)

On considère la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2 - \frac{x^2}{2} - \cos x$$

On rappelle que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives les fonctions : $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto -\sin x$.

1. Montrer que pour tout *x* réel, on a : $g''(x) = -1 + \cos x$.
   En déduire le sens de variation de la dérivée g' de la fonction *g*.
2. En notant que l'on a $g'(0) = 0$, déduire de la question précédente le signe de la fonction g' sur $\mathbb{R}$ puis les variations de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$.
4. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} (on détaillera la démarche).

Exercice N°2 (12 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1;1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

1. Pourquoi la fonction *f* est-elle continue sur $\mathcal{D}$?
2. Montrer que pour tout *x* de $\mathcal{D}$, on a : $f'(x) = \frac{x\,g(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$ où $g(x) = x^3 - 3x - 4$.
3. Etudier les variations de la fonction *g* et en donner le tableau de variation.
4. Montrer que la fonction *g* s'annule pour un unique réel que l'on notera β.
5. Déduire de ce qui précède le signe de *g* sur $\mathcal{D}$.
6. Dresser le tableau de variation de *f* (on ne donnera pas de valeur approchée de $f(\beta)$).
7. Donner, suivant la valeur du réel *k*, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ (aucune justification n'est attendue).