

« C'est justement pour préserver ce qui est neuf et révolutionnaire
dans chaque enfant que l'éducation doit être conservatrice,
c'est-à-dire assurer "la continuité du monde". »
Hannah ARENDT – La responsabilité.

Corrigé

Exercice N°1

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = E(x) \sin(\pi x)$$

Pour tout réel x de l'intervalle $[-1; 0[$, on a : $E(x) = -1$ et donc : $f(x) = -\sin(\pi x)$.

On en déduit alors : $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} [-\sin(\pi x)] = -\sin(\pi \times 0) = -\sin 0 = 0$ (limite d'une composée).

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1[$, on a : $E(x) = 0$ et donc : $f(x) = 0$.

On en déduit alors : $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} 0 = 0 = f(0)$.

En définitive, on a : $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = f(0)$. D'où :

La fonction f est continue en 0.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1[$, on a : $f(x) = 0$ (cf. ci-dessus).

On en déduit alors : $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} 0 = 0$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[1; 2[$, on a : $E(x) = 1$ et donc : $f(x) = \sin(\pi x)$.

On en déduit alors : $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \sin(\pi x) = \sin \pi = 0$ (limite d'une composée).

En définitive, on a : $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = f(1)$. D'où :

La fonction f est continue en 1.

Exercice N°2

Soit la fonction h définie par :

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 7}$$

1. Le réel x appartient à l'ensemble de définition \mathcal{D}_h de la fonction h si, et seulement si, il est solution du système :

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 7 \geq 0 \end{cases}$$

Le discriminant Δ associé au trinôme : $x^2 + 2x + 3$, vaut : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$.
Il est strictement négatif et le coefficient de « x^2 » est positif (il vaut 1). On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 > 0$$

Le discriminant δ associé au trinôme : $x^2 - 3x + 7$, vaut :
 $\delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 9 - 28 = -19$.

Il est strictement négatif et le coefficient de « x^2 » est positif (il vaut 1). On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 7 > 0$$

Pour tout x réel, on a donc :

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 3 > 0 \\ x^2 - 3x + 7 > 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{D}_h = \mathbb{R}}$$

2. Les fonctions $x \mapsto x^2 + 2x + 3$ et $x \mapsto x^2 - 3x + 7$ sont continues sur \mathbb{R} en tant que fonctions polynômes. D'après la question précédente, elles prennent toutes les deux leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$. Or, la fonction racine carrée est continue sur \mathbb{R}_+ . On en déduit immédiatement que les fonctions composées $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ et $x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 7}$ sont continues sur \mathbb{R} . Finalement, la fonction h est continue sur $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions continues sur cet intervalle.

La fonction h est continue sur $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

3. On a immédiatement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

On en déduit (composition) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 7} = +\infty$.

Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

Pour lever l'indétermination, nous allons utiliser la forme conjuguée de $h(x)$: comme on a : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 > 0$ et $x^2 - 3x + 7 > 0$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 7} > 0$$

D'où :

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 7})(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 7})}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 7}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}^2 - \sqrt{x^2 - 3x + 7}^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 7}} \\ &= \frac{(x^2 + 2x + 3) - (x^2 - 3x + 7)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 7}} \\ &= \frac{5x - 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 7}} \end{aligned}$$

Puisque nous cherchons la limite de la fonction h en $+\infty$, nous pouvons travailler sur \mathbb{R}_+^* .
Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{5x - 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 7}} \\ &= \frac{x \left(5 - \frac{4}{x} \right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} \right)}} \\ &= \frac{x \left(5 - \frac{4}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} \right)} \\ &= \frac{5 - \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}} \end{aligned}$$

Comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, il vient (somme) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{4}{x}\right) = 5$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = 1$. Et comme $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ (continuité de la racine carrée en 1), il vient (composition) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} = 1$. Enfin (somme) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}\right) = 2$.

On déduit finalement de ce qui précède :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{5}{2}$$

Exercice N°3 (5 points)

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 2 - \frac{x^2}{2} - \cos x$$

1. La fonction g est la somme de la fonction $x \mapsto 2 - \frac{x^2}{2}$, continue sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme, et de la fonction $x \mapsto -\cos x$, continue sur \mathbb{R} comme opposée d'une fonction continue sur \mathbb{R} . On en conclut immédiatement :

La fonction g est continue sur \mathbb{R} .

2. La fonction $x \mapsto 2 - \frac{x^2}{2}$ est paire sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme ne comportant que des monômes de degré pair et la fonction $x \mapsto -\cos x$ est paire sur \mathbb{R} comme opposée d'une fonction paire. Ainsi, la fonction g est paire sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions paires sur \mathbb{R} .

La fonction g est une fonction paire sur \mathbb{R} .

3. La fonction $x \mapsto 2 - \frac{x^2}{2}$ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme. La fonction $x \mapsto -\cos x$ est dérivable sur \mathbb{R} comme opposée d'une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout x réel on a alors :

$$g'(x) = 0 - 2 \times \frac{x}{2} - (-\sin x) = -x + \sin x$$

La fonction g' est elle-même dérivable sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle : la fonction polynôme $x \mapsto -x$ et la fonction sinus. Pour tout réel x , on a alors :

$$g''(x) = -1 + \cos x$$

Pour tout x réel, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$, d'où : $-2 \leq -1 + \cos x \leq 0$. Par ailleurs, la fonction g'' ne s'annule qu'aux points $x_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). On en déduit finalement :

La fonction g' est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

4. On a immédiatement : $g'(0) = -0 + \sin 0 = 0$. Comme la fonction g' est strictement décroissante sur \mathbb{R} , on en déduit immédiatement :

- Si $x < 0$, on a : $g'(x) > 0$;
- Si $x > 0$, on a : $g'(x) < 0$.

On en déduit alors :

La fonction g est strictement croissante sur \mathbb{R}_- et strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .

5. La fonction g est continue sur \mathbb{R}_+ car elle est continue sur \mathbb{R} (cf. la question 1.). Par ailleurs, d'après la question précédente, elle est strictement décroissante sur cet intervalle.

On a aussi : $g(0) = 2 - \frac{0^2}{2} - \cos 0 = 2 - 1 = 1 > \frac{1}{2}$.

Enfin, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{x^2}{2} - \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{x^2} \right) \right]$.

On a classiquement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, on a aussi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

Et comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, le théorème des gendarmes nous permet de

conclure : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$. Puis (somme) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{x^2} \right) = -\frac{1}{2}$.

Comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$, il vient finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{x^2} \right) \right] = -\infty$.

Le théorème de la bijection nous permet alors de conclure :

$$\text{L'équation } f(x) = \frac{1}{2} \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

6. En tabulant la fonction h avec un pas égale à 1, on obtient : $1 < \alpha < 2$.
En la tabulant ensuite avec un pas égal à 10^{-1} , on obtient : $1,9 < \alpha < 2,0$.
En la tabulant enfin avec un pas égal à 10^{-1} , on obtient :

$$1,91 < \alpha < 1,92$$

A titre de complément, nous fournissons la courbe représentative de la fonction h :

