

Corrigé

Exercice N°1 (12 points)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes :

$$u_n = \sin(7n) + 2n$$

$$v_n = (-2)^n \times \sqrt{n} + n$$

$$w_n = \frac{\sin(n\pi)}{n^{11} + 4n^5 + 3}$$

$$r_n = -5 \times \left(\frac{4,14}{\pi + 1} \right)^n$$

$$s_n = \frac{2 - 5 \times \left(\frac{3}{4} \right)^{n+2}}{-11 \times \left(\frac{6}{5} \right)^n - 5n^2}$$

$$t_n = \frac{3^n - 11 \times 2^{n+2}}{5 \times 2^{2n} - 23 \times 3^{n+1}}$$

On a, pour tout n entier naturel : $-1 \leq \sin(7n) \leq 1$. D'où : $-1 + 2n \leq \sin(7n) + 2n \leq 1 + 2n$,
c'est-à-dire : $-1 + 2n \leq u_n \leq 1 + 2n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1 + 2n) = +\infty$, il vient (comparaison) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Pour tout n entier naturel, on a : $v_n = (-2)^n \times \sqrt{n} + n = (-1)^n \times 2^n \times \sqrt{n} + n$.

L'inégalité de Bernoulli (cf. page 17 et 24 (suites géométriques) de votre livre) nous permet d'écrire $2^n = (1+1)^n \geq 1+n$ (on prend $a=1$).

Il vient alors :

- Si n est pair : $(-1)^n \times 2^n \times \sqrt{n} + n = 2^n \times \sqrt{n} + n \geq (n+1) \times \sqrt{n} + n$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(n+1) \times \sqrt{n} + n] = +\infty$. Ainsi, les termes d'indices pairs de la suite sont arbitrairement grands (on écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = +\infty$).

- Si n est impair :

$$(-1)^n \times 2^n \times \sqrt{n} + n = -2^n \times \sqrt{n} + n \leq -(n+1) \times \sqrt{n} + n$$

$$= -n\sqrt{n} \times \left[\frac{n+1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = -n\sqrt{n} \times \left[1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1 + 0 - 0 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n\sqrt{n}) = -\infty$, on peut affirmer que

les termes de rangs impairs de la suite sont arbitrairement petits (on écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1} = -\infty).$$

Finalement :

La suite (v_n) n'admet pas de limite.

On a (très !) classiquement, pour tout entier naturel n : $\sin(n\pi) = 0$ et donc $w_n = 0$.

D'où, immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

La suite (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4,14}{\pi+1}$ et de premier terme -5 .

Comme $\pi+1 > 4,14$, il vient $\frac{4,14}{\pi+1} \in]-1; +1[$ puis, immédiatement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$$

Pour tout entier naturel n , on a : $5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} = 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{5 \times 9}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{45}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

La suite de terme général $\frac{45}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est une suite géométrique dont la raison $\left(\frac{3}{4}\right)$ appartient à

l'intervalle $]-1; +1[$. On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}\right] = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 - 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}\right] = 2 - 0 = 2$.

La suite de terme général $-11 \times \left(\frac{6}{5}\right)^n$ est une suite géométrique dont la raison $\left(\frac{6}{5} = 1,2\right)$ est

strictement supérieure à 1. Il vient donc immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n = +\infty$ puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-11 \times \left(\frac{6}{5}\right)^n\right] = -\infty.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5n^2) = -\infty$, il vient alors (addition) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-11 \times \left(\frac{6}{5}\right)^n - 5n^2\right] = -\infty$.

On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 - 5 \times \left(\frac{3}{4} \right)^{n+2} \right] = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-11 \times \left(\frac{6}{5} \right)^n - 5n^2 \right] = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - 5 \times \left(\frac{3}{4} \right)^{n+2}}{-11 \times \left(\frac{6}{5} \right)^n - 5n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$$

Un peu de manipulation de puissances désormais où il convenait de détecter, au numérateur et au dénominateur, la puissance dominante...

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{3^n - 11 \times 2^{n+2}}{5 \times 2^{2n} - 23 \times 3^{n+1}} = \frac{3^n - 11 \times 2^2 \times 2^n}{5 \times (2^2)^n - 23 \times 3 \times 3^n} = \frac{3^n - 44 \times 2^n}{5 \times 4^n - 69 \times 3^n} = \frac{3^n \times \left(1 - 44 \times \frac{2^n}{3^n} \right)}{4^n \times \left(5 - 69 \times \frac{3^n}{4^n} \right)} \\ &= \left(\frac{3}{4} \right)^n \times \frac{1 - 44 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n}{5 - 69 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n} \end{aligned}$$

Comme $\frac{2}{3} \in]-1; +1[$ et $\frac{3}{4} \in]-1; +1[$, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$.

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - 44 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] = 1 - 44 \times 0 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[5 - 69 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n \right] = 5 - 69 \times 0 = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - 44 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[5 - 69 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n \right] = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 44 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n}{5 - 69 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n} = \frac{1}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n \times \frac{1 - 44 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n}{5 - 69 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n} \right] = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$$

Exercice N°2 (8 points)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{3} \times (u_n)^3 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.

Pour tout entier naturel n , posons \mathcal{P}_n : « $0 \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation

Pour $n = 0$, on a, par définition de la suite (u_n) , $u_0 = 1$ qui appartient bien à l'intervalle $[0; 1]$.

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité

Soit N un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que la propriété \mathcal{P}_N est vraie, c'est-à-dire : $0 \leq u_N \leq 1$.

On veut montrer que \mathcal{P}_{N+1} est vraie, c'est-à-dire : $0 \leq u_{N+1} \leq 1$.

On a $u_{N+1} = u_N - \frac{1}{3} \times (u_N)^3 = f(u_N)$ où f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \rightarrow x - \frac{1}{3}x^3$.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale et on a, pour tout x réel :

$$f' : x \rightarrow 1 - \frac{1}{3} \times 3x^2 = 1 - x^2$$

Comme $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, il vient immédiatement :

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[$ ou $x \in]1; +\infty[$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 1[$.

On en déduit ainsi que la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty; -1]$ et $[1; +\infty[$, et strictement croissante sur l'intervalle $[-1; 1]$.

En particulier, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$. On a donc :

$$0 \leq u_N \leq 1 \Leftrightarrow f(0) \leq f(u_N) \leq f(1)$$

Mais on a $f(0) = 0 - \frac{1}{3} \times 0^3 = 0$ et $f(1) = 1 - \frac{1}{3} \times 1^3 = \frac{2}{3}$.

D'où : $0 \leq u_N \leq 1 \Leftrightarrow f(0) \leq f(u_N) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq u_{N+1} \leq \frac{2}{3}$.

Ainsi, on a bien : $0 \leq u_{N+1} \leq 1$. La propriété \mathcal{P}_{N+1} est vraie.

Conclusion

Comme la propriété est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire, on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier naturel n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$$

2. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Ne pas se précipiter sur des « raisonnements classiques » (mais erronés... ⊗) du type « Comme f est strictement croissante sur $[0; 1]$ alors la suite (u_n) est strictement croissante. ».

Pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{3} \times (u_n)^3 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3} \times (u_n)^3$.

Comme on a (cf ; la question précédente) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{3} \times (u_n)^3 \leq 0$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$, soit :

La suite (u_n) est décroissante.

3. Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

A la première question, on a vu que la suite (u_n) était minorée. A la question précédente, on a établi qu'elle était minorée. Etant minorée et décroissante, la suite (u_n) est convergente.

Notons L sa limite.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[u_n - \frac{1}{3} \times (u_n)^3 \right] = L - \frac{1}{3} \times L^3$.

De l'égalité $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{3} \times (u_n)^3$ valable pour tout entier naturel n , on tire :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[u_n - \frac{1}{3} \times (u_n)^3 \right]$, c'est-à-dire $L = L - \frac{1}{3} \times L^3$.

On a alors : $L = L - \frac{1}{3} \times L^3 \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{3} \times L^3 \Leftrightarrow L = 0$.

La suite (u_n) converge et sa limite est nulle.