

« La tangente a plus de puissance que la sécante. »
Victor HUGO – Tas de pierres

« La passion est une existence primitive ou,
si vous le voulez, un mode primitif d'existence. »
David HUME – Traité de la nature humaine

Corrigé

Exercice N°1

1. $f(x) = -\frac{3}{x^2} + x^4\sqrt{x} = -3x^{-2} + x^4\sqrt{x}$ sur \mathbb{R}^{+*} .

On dérive g comme somme de deux fonctions, la deuxième fonction étant elle-même un produit. Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \times \frac{-2}{x^3} + 4x^3 \times \sqrt{x} + x^4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{6}{x^3} + 4x^3\sqrt{x} + \frac{x^4}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6}{x^3} + 4x^3\sqrt{x} + \frac{x^3\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}}{2\cancel{\sqrt{x}}} = \frac{6}{x^3} + 4x^3\sqrt{x} + \frac{x^3\sqrt{x}}{2} = \frac{6}{x^3} + \frac{9}{2}x^3\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{6}{x^3} + \frac{9}{2}x^3\sqrt{x}$$

2. $g(x) = \sqrt{3 + \tan^2 x}$ sur \mathbb{R} .

La fonction g est la composée de la fonction $l : x \mapsto 3 + \tan^2 x$ et de la fonction racine carrée.

La fonction l est elle-même la composée de la fonction tangente et de la fonction $x \mapsto 3 + x^2$.

On a donc : $l'(x) = (1 + \tan^2 x) \times 2 \tan x = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$.

Il vient alors :

$$g'(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{2\sqrt{3 + \tan^2 x}} = \frac{\tan x (1 + \tan^2 x)}{\sqrt{3 + \tan^2 x}}$$

$$g'(x) = \frac{\tan x (1 + \tan^2 x)}{\sqrt{3 + \tan^2 x}}$$

3. $h(x) = \tan x - \frac{4}{3}x$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

La fonction tangente est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. La fonction $x \mapsto -\frac{4}{3}x$ est dérivable sur ce même intervalle en tant que fonction linéaire.

La fonction h est donc dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

On a donc :

$$h'(x) = 1 + \tan^2 x - \frac{4}{3} = \tan^2 x - \frac{1}{3} = \left(\tan x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\tan x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Comme $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et comme la fonction tangente est impaire et strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, on peut construire le tableau donnant le signe de h' :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x - \frac{1}{\sqrt{3}}$		-	0	+
$\tan x + \frac{1}{\sqrt{3}}$	-	0	+	+
$h'(x)$	+	0	-	0

On pouvait également dériver en utilisant l'autre expression classique de la dérivée de la tangente :

$$h'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{4}{3} = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

Sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ la fonction cosinus prend des valeurs strictement positives. On a

donc : $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ et h' est du signe de $\frac{1}{\cos x} - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Or, on a : $\frac{1}{\cos x} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3} \cos x} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \right)$.

Mais $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right)$. On peut alors conclure comme précédemment sur le signe de h' .

Exercice N°2

1,86 est proche de 2 et nous pouvons choisir cette valeur comme valeur de référence.

Notons alors f la fonction inverse. On a alors, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

On considère alors l'approximation affine :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \times (x - a)$$

Soit ici :

$$\frac{1}{1,86} = f(1,86) \approx f(2) + f'(2) \times (1,86 - 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \times (1,86 - 2) = 0,5 + \frac{0,14}{4} = 0,535$$

$$\boxed{\frac{1}{1,86} \approx 0,535}$$

Exercice N°3

1. $f(x) = \frac{7x^{11} - 3x + 8}{x^3}$ sur \mathbb{R}^{+*} .

On a, pour tout x réel strictement positif :

$$f(x) = \frac{7x^{11} - 3x + 8}{x^3} = 7 \frac{x^{11}}{x^3} - 3 \frac{x}{x^3} + 8 \frac{1}{x^3} = 7x^8 - 3 \frac{1}{x^2} + 8 \frac{1}{x^3} = 7x^8 - 3x^{-2} + 8x^{-3}$$

On obtient alors, en notant F une primitive quelconque de f sur \mathbb{R}^{+*} :

$$\begin{aligned}
F(x) &= 7 \times \frac{1}{8+1} x^{8+1} - 3 \times \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + 8 \times \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C \\
&= \frac{7}{9} x^9 + 3x^{-1} - 4x^{-2} + C \\
&= \frac{7}{9} x^9 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + C
\end{aligned}$$

Où C est une constante réelle quelconque.

$$\boxed{F(x) = \frac{7}{9} x^9 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + C}$$

2. $g(x) = \frac{\tan^{27} x}{\cos^2 x}$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$;

Pour tout x de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, posons $u(x) = \tan x$. La fonction u est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

et on a, pour tout réel x de cet intervalle : $u'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

On a donc : $g(x) = \frac{\tan^{27} x}{\cos^2 x} = u'(x) u^{27}(x)$.

On obtient alors, en notant G une primitive quelconque de g sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$:

$$G(x) = \frac{1}{27+1} u^{27+1}(x) + C = \frac{1}{28} \tan^{28} x + C$$

Où C est une constante réelle quelconque.

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{28} \tan^{28} x + C}$$

3. $h(x) = \frac{\sin x \cos^4 x}{(\cos^5 x + 6)^6}$ sur \mathbb{R} .

Posons $u(x) = \cos^5 x + 6$. La fonction $x \mapsto \cos^5 x$ est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de deux fonctions (cosinus et $x \mapsto x^5$) dérivables sur \mathbb{R} . La fonction u est donc dérivable sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions ($x \mapsto \cos^5 x$ et $x \mapsto 6$) dérivables sur \mathbb{R} .

Il vient alors, pour tout x réel : $u'(x) = -5 \sin x \cos^4 x$.

On a donc :

$$h(x) = \frac{\sin x \cos^4 x}{(\cos^5 x + 6)^6} = -\frac{1}{5} \times \frac{-5 \sin x \cos^4 x}{(\cos^5 x + 6)^6} = -\frac{1}{5} \frac{u'(x)}{u^6(x)} = -\frac{1}{5} u'(x) u^{-6}(x)$$

On obtient alors, en notant H une primitive quelconque de h sur \mathbb{R} :

$$h(x) = -\frac{1}{5} \times \frac{1}{-6+1} u^{-6+1}(x) + C = \frac{1}{25} u^{-5}(x) + C = \frac{1}{25(\cos^5 x + 6)^5} + C$$

Où C est une constante réelle quelconque.

$$h(x) = \frac{1}{25(\cos^5 x + 6)^5} + C$$