

« La tangente a plus de puissance que la sécante. »
Victor HUGO – Tas de pierres

Corrigé

Exercice N°1

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée (on ne justifiera pas la dérivabilité de la fonction sur l'intervalle considéré) :

1. $f(x) = \frac{7x^3 - 8}{5}$ sur \mathbb{R} .

La fonction f est une fonction polynôme.
Pour tout x réel, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{5}(7 \times 3x^2 - 0) = \frac{21}{5}x^2$$

$$f'(x) = \frac{21}{5}x^2$$

2. $g(x) = -\frac{3}{x^2} + x^4\sqrt{x}$ sur \mathbb{R}^{+*} .

On dérive g comme somme de deux fonctions, la deuxième fonction étant elle-même un produit. Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -3 \times \frac{-2}{x^3} + 4x^3 \times \sqrt{x} + x^4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{6}{x^3} + 4x^3\sqrt{x} + \frac{x^4}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6}{x^3} + 4x^3\sqrt{x} + \frac{x^3\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}}{2\cancel{\sqrt{x}}} = \frac{6}{x^3} + 4x^3\sqrt{x} + \frac{x^3\sqrt{x}}{2} = \frac{6}{x^3} + \frac{9}{2}x^3\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{6}{x^3} + \frac{9}{2}x^3\sqrt{x}$$

$$3. \quad h(x) = \frac{3-5x^2}{x^3+x^2-2} \text{ sur }]1; +\infty[.$$

La fonction h est une fonction rationnelle. On la dérive comme rapport de deux fonctions polynômes :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{3-5x^2}{x^3+x^2-2} = \frac{-10x \times (x^3+x^2-2) - (3-5x^2) \times (3x^2+2x)}{(x^3+x^2-2)^2} \\ &= -x \frac{10(x^3+x^2-2) + (3-5x^2)(3x+2)}{(x^3+x^2-2)^2} \\ &= -x \frac{10x^3 + 10x^2 - 20 + 9x + 6 - 15x^3 - 10x^2}{(x^3+x^2-2)^2} \\ &= -x \frac{-5x^3 + 9x - 14}{(x^3+x^2-2)^2} \\ &= x \frac{5x^3 - 9x + 14}{(x^3+x^2-2)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = x \frac{5x^3 - 9x + 14}{(x^3 + x^2 - 2)^2}}$$

$$4. \quad j(x) = 3(\sin x + \cos x)^4 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

La fonction j est la composée de la fonction $x \mapsto \sin x + \cos x$ et de la fonction $x \mapsto 3x^4$.
On a alors, pour tout x réel :

$$j'(x) = (\cos x - \sin x) \times 3 \times 4 (\sin x + \cos x)^3 = 12(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^3$$

$$\boxed{j'(x) = 12(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^3}$$

$$5. \quad k(x) = \sqrt{3 + \tan^2 x} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

La fonction k est la composée de la fonction $l : x \mapsto 3 + \tan^2 x$ et de la fonction racine carrée.

La fonction l est elle-même la composée de la fonction tangente et de la fonction $x \mapsto 3 + x^2$.

On a donc : $l'(x) = (1 + \tan^2 x) \times 2 \tan x = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$.

Il vient alors :

$$k'(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{2\sqrt{3 + \tan^2 x}} = \frac{\tan x (1 + \tan^2 x)}{\sqrt{3 + \tan^2 x}}$$

$$k'(x) = \frac{\tan x (1 + \tan^2 x)}{\sqrt{3 + \tan^2 x}}$$

Exercice N°2

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée (on ne justifiera pas la dérivabilité de la fonction sur l'intervalle considéré) et déterminer son signe sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = \tan^3 x$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

La fonction f est la composée de la fonction tangente et de la fonction $x \mapsto x^3$.

La fonction tangente est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et prend ses valeurs dans \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme.

La fonction f est ainsi dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et on a :

$$f'(x) = 3(1 + \tan^2 x) \tan^2 x$$

Sur \mathbb{R} , on a : $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que sur l'intervalle

$\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, on a : $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Pour $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[- \{0\}$, on a alors : $\tan x > 0$ et donc $\tan^2 x > 0$ et, à fortiori,

$1 + \tan^2 x > 0$.

Finalement :

- $f'(0) = 0$;
- $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[- \{0\}$, $f'(x) > 0$.

2. $g(x) = \frac{1}{x} + 3x$ sur \mathbb{R}^{+*} .

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (la fonction inverse et la fonction linéaire $x \mapsto 3x$). On a :

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2} + 3 = \frac{-1 + 3x^2}{x^2} = \frac{(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{x^2}$$

On a : $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ et $x > 0 \Rightarrow \sqrt{3}x+1 > 1 > 0$. Le signe de la dérivée est donc celui de la différence : $\sqrt{3}x-1$ qui s'annule pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Il vient donc immédiatement :

- Si $x \in \left] 0; \frac{1}{\sqrt{3}} \right[$ alors $g'(x) < 0$;
- $g'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$;
- Si $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $g'(x) > 0$.

3. $h(x) = \tan x - \frac{4}{3}x$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

La fonction tangente est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. La fonction $x \mapsto -\frac{4}{3}x$ est dérivable sur ce même intervalle en tant que fonction linéaire.

La fonction h est donc dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et on a :

$$h'(x) = 1 + \tan^2 x - \frac{4}{3} = \tan^2 x - \frac{1}{3} = \left(\tan x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\tan x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Comme $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et comme la fonction tangente est impaire et strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, on peut construire le tableau donnant le signe de h' (cf. page suivante).

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x - \frac{1}{\sqrt{3}}$	-	-	0	+
$\tan x + \frac{1}{\sqrt{3}}$	-	0	+	+
$h'(x)$	+	0	-	0

On pouvait également dériver en utilisant l'autre expression classique de la dérivée de la tangente :

$$h'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{4}{3} = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

Sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ la fonction cosinus prend des valeurs strictement positives. On a

donc : $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ et h' est du signe de $\frac{1}{\cos x} - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Or, on a : $\frac{1}{\cos x} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3} \cos x} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \right)$.

Mais $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right)$. On peut alors conclure comme précédemment sur le signe de h' .