CORRIGE

La calculatrice est autorisée.

Exercice N°1 (6 points)

Résoudre les équations suivantes :

$$\ln(x-1)\times\ln(x-2)\times\ln(x-3)\times\ldots\times\ln(x-n)=0$$
$$(n \text{ entier naturel non nul})$$
$$\ln\left(x^4\right)=4x$$
$$\ln\left(e^{2x}-e^x-2\right)=\ln\left(e^x+4\right)+\ln 2$$

→ $\ln(x-1)\times\ln(x-2)\times\ln(x-3)\times\ldots\times\ln(x-n)=0$

Le produit comporte des facteurs de la forme $\ln(x-k)$ avec k compris entre 1 et *n*. Il y a donc *n* facteurs au total.
Le facteur $\ln(x-k)$ est défini pour $x-k>0$, c'est-à-dire $x>k$ soit $x\in\left]k\,;+\infty\right[$.
Ainsi, le produit est défini pour *x* dans :

$$\left]1\,;+\infty\right[\cap\left]2\,;+\infty\right[\cap\ldots\cap\left]n-1\,;+\infty\right[\cap\left]n\,;+\infty\right[=\left]n\,;+\infty\right[$$

$$\ln(x-1)\times\ln(x-2)\times\ln(x-3)\times\ldots\times\ln(x-n)=0$$
$$\Leftrightarrow \ln(x-1)=0 \text{ ou } \ln(x-2)=0 \text{ ou } \ln(x-3)=0 \ldots \text{ ou } \ln(x-n)=0$$

Dans $\left]1\,;+\infty\right[$, on a : $\ln(x-1)=0\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$
Dans $\left]2\,;+\infty\right[$, on a : $\ln(x-2)=0\Leftrightarrow x-2=1\Leftrightarrow x=3$
…
Dans $\left]n\,;+\infty\right[$, on a : $\ln(x-n)=0\Leftrightarrow x-n=1\Leftrightarrow x=n+1$

La seule valeur obtenue qui appartient à l'intervalle $\left]n\,;+\infty\right[$ est $n+1$. C'est l'unique solution de l'équation.

L'équation $\ln(x-1)\times\ln(x-2)\times\ln(x-3)\times\ldots\times\ln(x-n)=0$
admet pour unique solution $n+1$.

→ $\ln\left(x^4\right)=4x$

$\ln\left(x^4\right)$ existe pour tout réel x tel que $x^4>0$, ce qui équivaut à $x\neq 0$ puisque x^4 est un carré. En d'autres termes, on résout l'équation dans $\mathbb{R}^*$.

Si est strictement positif, on a : $\ln\left(x^4\right)=4\ln x$ et l'équation équivaut à $\ln x = x$.
La courbe représentative de la fonction logarithme népérien est située sous la première bissectrice (résultat du cours que vous n'êtes pas tenus de justifier sauf… si on vous le redemande ! ☺) et le la coupe pas. L'équation n'admet donc pas de solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si est strictement négatif, on a : $\ln\left(x^4\right)=4\ln|x|$ et l'équation équivaut à $\ln|x|=x$, soit encore, x étant négatif : $\ln(-x)=x$.
Votre calculatrice devait vous conduire à conjecturer (dans votre tête, sur votre brouillon,…) que cette équation admettait une solution unique sur $\mathbb{R}_-^*$. Ecrire cette conjecture sur votre copie eut été déjà une excellente chose. Démontrons la.
Nous allons considérer la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_-^*$ par : $\varphi(x)=x-\ln(-x)$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle : l'identité et la fonction $x\mapsto -\ln(-x)$. La fonction $x\mapsto -\ln(-x)$ admet pour dérivée la fonction $x\mapsto -\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{-1}{x}$.
On a donc : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x)=1+\dfrac{-1}{x}>0$ car x est strictement négatif.
On déduit de ce qui précède que la fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

On a enfin :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln(-x)\right)=-\infty\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\ln(-x)\right)=-\infty$$

Et :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x=0\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}(-x)=0^+\\ \lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}}(-\ln X)=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(-\ln(-x)\right)=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(x-\ln(-x)\right)=+\infty$$

Le théorème de bijection nous permet alors de conclure que la fonction φ s'annule pour une unique valeur α sur $\mathbb{R}_-^*$. Comme $\varphi(-1) = -1 - \ln 1 = -1 < 0$, on a : $\alpha \in]-1\,;0[$.

L'équation $\ln(x^4) = 4x$ admet une unique solution $\alpha \in]-1\,;0[$.

→ $\ln(e^{2x} - e^x - 2) = \ln(e^x + 4) + \ln 2$

On doit d'abord déterminer les valeurs de x pour lesquelles les logarithmes sont bien définis.
On a facilement (éventuellement en résolvant d'abord : $X^2 - X - 2 = 0$)
$e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$. Comme on a : $\forall x \in \mathbb{R},\, e^x + 1 > e^x > 0$, il vient $e^{2x} - e^x - 2 > 0$ si, et seulement si, $e^x - 2 > 0$. Or, $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$.
Finalement : $\ln(e^{2x} - e^x - 2)$ est défini pour tout réel *x* de $]\ln 2\,;+\infty[$.
Comme on a : $\forall x \in \mathbb{R},\, e^x + 4 > e^x > 0$, on en déduit immédiatement que $\ln(e^x + 4)$ existe pour tout réel *x*.

En définitive, on résout l'équation proposée dans $]\ln 2\,;+\infty[$.
Pour tout réel *x* dans cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned}
&\ln(e^{2x} - e^x - 2) = \ln(e^x + 4) + \ln 2\\
\Leftrightarrow\ &\ln(e^{2x} - e^x - 2) = \ln\left[2 \times (e^x + 4)\right]\\
\Leftrightarrow\ &e^{2x} - e^x - 2 = 2 \times (e^x + 4)\\
\Leftrightarrow\ &e^{2x} - 3e^x - 10 = 0
\end{aligned}$$

Ici encore, en posant $X = e^x$, on se ramène à une équation du 2nd degré : $X^2 - 3X - 10 = 0$.
Détaillons sa résolution. On a : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49$.
D'où les racines : $X_1 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \dfrac{3-7}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{3+7}{2} = 5$.
On en tire : $X^2 - 3X - 10 = (X+2)(X-5)$ puis : $e^{2x} - 3e^x - 10 = 0 \Leftrightarrow (e^x + 2)(e^x - 5) = 0$.
Comme on a $\forall x \in \mathbb{R},\, e^x + 2 > e^x > 0$, il vient :

$$(e^x + 2)(e^x - 5) = 0 \Leftrightarrow e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$$

Comme $5 > 2$, il vient (croissance stricte du logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$) : $\ln 5 > \ln 2$.

L'équation $\ln(e^{2x} - e^x - 2) = \ln(e^x + 4) + \ln 2$ admet pour unique solution : $\ln 5$.

Exercice N°2 (6 points)

Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes (on ne demande pas de déterminer leur domaine de dérivabilité) :

$$f(x)=\ln(\ln(x)) \qquad g(x)=\ln\sqrt{1+\sqrt{x}} \qquad h(x)=e^{1+\ln\frac{1}{x}}$$

→ $f(x)=\ln(\ln(x))$

De la forme $f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=\ln(x)$ dont la dérivée est la fonction inverse.

La fonction u prend des valeurs strictement positives sur $]1\,;+\infty[$ et on a alors, sur cet intervalle : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}=\dfrac{1}{x\ln(x)}$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{x\ln(x)}}$$

→ $g(x)=\ln\sqrt{1+\sqrt{x}}$

On ne se précipite pas !

On écrit d'abord : $g(x)=\ln\sqrt{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$.

La fonction $x\mapsto\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ est de la forme $\ln u$ avec $u(x)=1+\sqrt{x}>0$ et $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Elle admet donc pour dérivée : $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

On en déduit finalement : $g'(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{4\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

$$\boxed{g'(x)=\frac{1}{4\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}}$$

→ $h(x)=e^{1+\ln\frac{1}{x}}$

Ici encore, on regarde attentivement l'expression de la fonction et… on la « manipule » un peu :

$$h(x)=e^{1+\ln\frac{1}{x}}=e^1\times e^{\ln\frac{1}{x}}=e\times\frac{1}{x}$$

Il vient alors immédiatement : $h'(x)=e\times\frac{-1}{x^2}=-\frac{e}{x^2}$.

$$\boxed{h'(x)=-\frac{e}{x^2}}$$

Exercice N°3 (8 points)

Soit *a* un réel strictement positif.

On pose : $f_a(x)=\sqrt{x}-a\ln x$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_{f_a}$ de f_a.
2. Déterminer les limites de f_a aux bornes de $\mathscr{D}_{f_a}$

   (En $+\infty$, on pourra poser $x=\sqrt{x}^2$. On rappelle que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)
3. Calculer la fonction dérivée f_a' de la fonction f_a.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_a.
5. Discuter, suivant les valeurs du réel *a*, le nombre de solutions de l'équation $f_a(x)=0$.

1. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction logarithme népérien est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la fonction f_a est définie sur : $\mathbb{R}_+\cap\mathbb{R}_+^*=\mathbb{R}_+^*$.

   Le domaine de définition de f_a est $\mathbb{R}_+$.

2. On doit étudier les limites de la fonction f_a en 0 (à droite) et en $+\infty$.

→ En 0 à droite.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\sqrt{x}=\sqrt{0}=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln x=-\infty$. Comme le réel a est strictement positif, on en déduit immédiatement : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(a\ln x\right)=-\infty$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f_a\left(x\right)=+\infty$.

→ En $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et, le réel a étant strictement positif : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a\ln x\right)=+\infty$. Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

En tenant compte de l'indication de l'énoncé, il vient, pour tout réel x strictement positif :

$$f_a\left(x\right)=\sqrt{x}-a\ln\left(\sqrt{x}^2\right)=\sqrt{x}-2a\ln\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(1-2a\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, il vient (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-2a\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=1-2a\times 0=1$.

Finalement (produit) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\left(1-2a\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} f_a\left(x\right)=+\infty$.

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f_a\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} f_a\left(x\right)=+\infty}$$

3. Pour tout x réel strictement positif, on a :

$$f_a'\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-a\times\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}}{2x}-\frac{2a}{2x}=\frac{\sqrt{x}-2a}{2x}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f_a'\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}-2a}{2x}}$$

4. Avant de dresser le tableau de variation de la fonction f_a, déterminons-en les variations.

D'après la question précédente : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f_a'\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}-2a}{2x}$. Comme x est strictement positif, on en déduit immédiatement que $f_a'\left(x\right)$ est du même signe que son numérateur.

Or, le réel a étant strictement positif : $\sqrt{x}-2a=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=2a\Leftrightarrow x=4a^2$ et, la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: $\sqrt{x}-2a>0\Leftrightarrow\sqrt{x}>2a\Leftrightarrow x>4a^2$.

On déduit de ce qui précède :

- La fonction $f_a\,'$ est strictement négative sur $\left]0\,;4a^2\right[$.
- $f_a\,'\left(4a^2\right)=0$.
- La fonction $f_a\,'$ est strictement positive sur $\left]4a^2\,;+\infty\right[$.

La fonction f_a est donc :

- strictement décroissante sur $\left]0\,;4a^2\right]$
- strictement croissante sur $\left[4a^2\,;+\infty\right[$.

On déduit de ce qui précède que la fonction f_a admet sur $\mathbb{R}_+^*$ un minimum en $4a^2$.
La valeur de ce minimum est :

$$\begin{aligned} f_a\left(4a^2\right) &= \sqrt{4a^2}-a\times\ln\left(4a^2\right)=2a-a\times 2\ln\left(2a\right) \\ &= 2a\left(1-\ln\left(2a\right)\right) \end{aligned}$$

Nous disposons désormais de tous les éléments pour dresser le tableau de variation de la fonction f_a.

x	$-\infty$		$4a^2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$2a\times\left(1-\ln\left(2a\right)\right)$	↗	$+\infty$

Remarque : on a facilement :

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} f_a\left(4a^2\right)=\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}}\left[2a\left(1-\ln\left(2a\right)\right)\right]=\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}}\left(2a-2a\times\ln\left(2a\right)\right)=0-0=0$$

5. Supposons $f_a\left(4a^2\right)=2a\left(1-\ln\left(2a\right)\right)>0$ (c'est-à-dire $1-\ln\left(2a\right)>0$, soit encore $a<\dfrac{e}{2}$).
Alors : $\forall x\in\mathbb{R},\ f_a\left(x\right)\geq 2a\left(1-\ln\left(2a\right)\right)>0$: la fonction f_a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

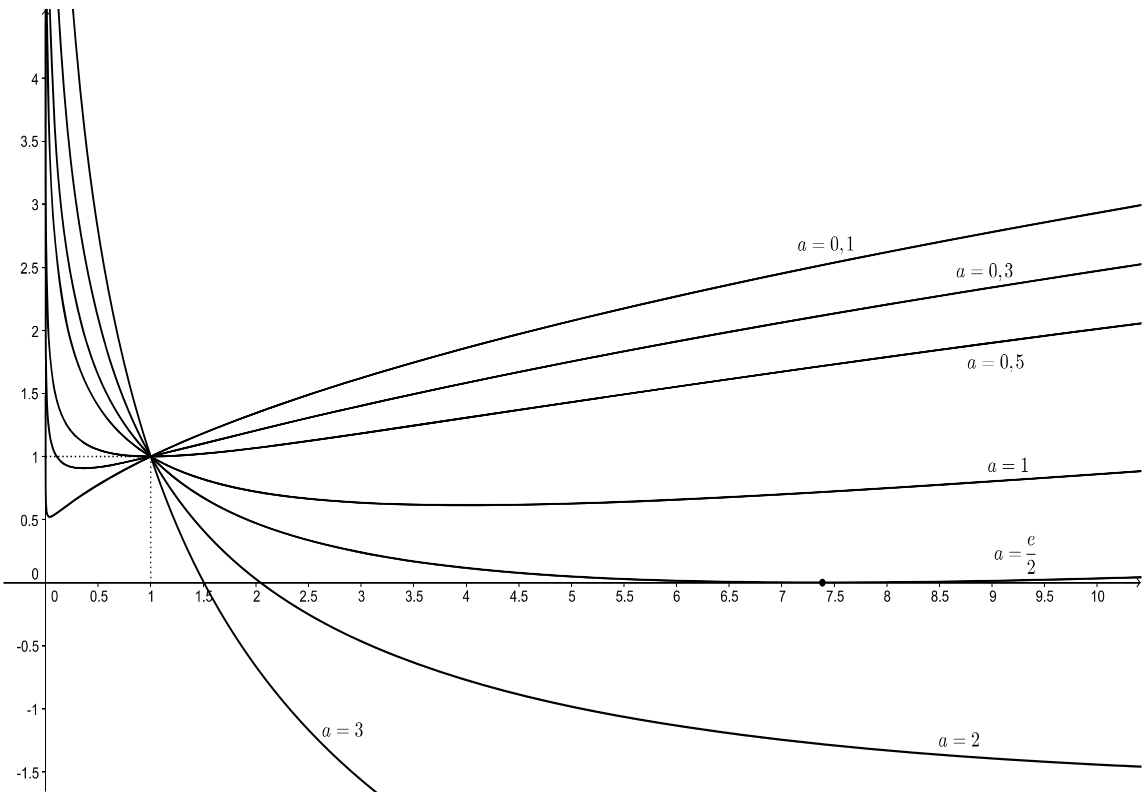
Supposons $f_a\left(4a^2\right)=2a\left(1-\ln\left(2a\right)\right)=0$ (c'est-à-dire $1-\ln\left(2a\right)=0$, soit encore $a=\dfrac{e}{2}$).
Comme la fonction f_a est strictement décroissante sur $\left]0\,;4a^2\right]$ et strictement croissante sur $\left[4a^2\,;+\infty\right[$, on aura : $\forall x\left]0\,;4a^2\right[,\ f_a\left(x\right)>f_a\left(4a^2\right)=0$ et $\forall x\left]4a^2\,;+\infty\right[,\ f_a\left(x\right)>f_a\left(4a^2\right)=0$.
Ainsi, la fonction f_a s'annule pour $x=4a^2$.

Supposons enfin que l'on ait $f_a\left(4a^2\right)=2a\left(1-\ln\left(2a\right)\right)<0$ (c'est-à-dire $1-\ln\left(2a\right)<0$, soit encore $a>\dfrac{e}{2}$).
Raisonnons sur l'intervalle $\left]0\,;4a^2\right]$.
La fonction f_a y est continue comme différence de deux fonctions continues.
Elle y est strictement décroissante.
Enfin : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_a\left(x\right)=+\infty$ et $f_a\left(4a^2\right)<0$.
Or $0\in\left[f_a\left(4a^2\right);+\infty\right[$, le théorème de la bijection nous permet alors de conclure que l'équation $f_a\left(x\right)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]0\,;4a^2\right[$.
En raisonnant de la même façon sur l'intervalle $\left[4a^2\,;+\infty\right[$, on démontre que l'équation $f_a\left(x\right)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]4a^2\,;+\infty\right[$.

Finalement :

- Si $a<\dfrac{e}{2}$, l'équation $f_a\left(x\right)=0$ n'admet pas de solution.
- Si $a=\dfrac{e}{2}$, l'équation $f_a\left(x\right)=0$ admet pour unique solution $x=4a^2$.
- Si $a>\dfrac{e}{2}$, l'équation $f_a\left(x\right)=0$ admet eux solutions : l'une dans $\left]0\,;4a^2\right[$ et l'autre dans $\left]4a^2\,;+\infty\right[$.

A titre de complément, commençons par fournir les courbes représentatives de fonctions f_a pour différentes valeurs du paramètre *a*.



On peut s'intéresser au lieu des points correspondant aux minimums des fonctions f_a.
On a vu que l'on avait : $f_a\left(4a^2\right) = 2a\left(1-\ln\left(2a\right)\right)$.
Les points correspondant aux minimums des fonctions f_a sont donc les points de coordonnées $\left(4a^2 ; 2a\left(1-\ln\left(2a\right)\right)\right)$ avec $a > 0$. Comme $\sqrt{4a^2} = 2a$, ils appartiennent donc à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}\left(1-\ln\sqrt{x}\right) = \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)$. Réciproquement, tout point de coordonnées $(x ; y)$ de cette courbe est le minimum de la fonction de paramètre *a* tel que $4a^2 = x$ soit : $a = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

On peut donc s'intéresser à la fonction φ définie par : $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)$.

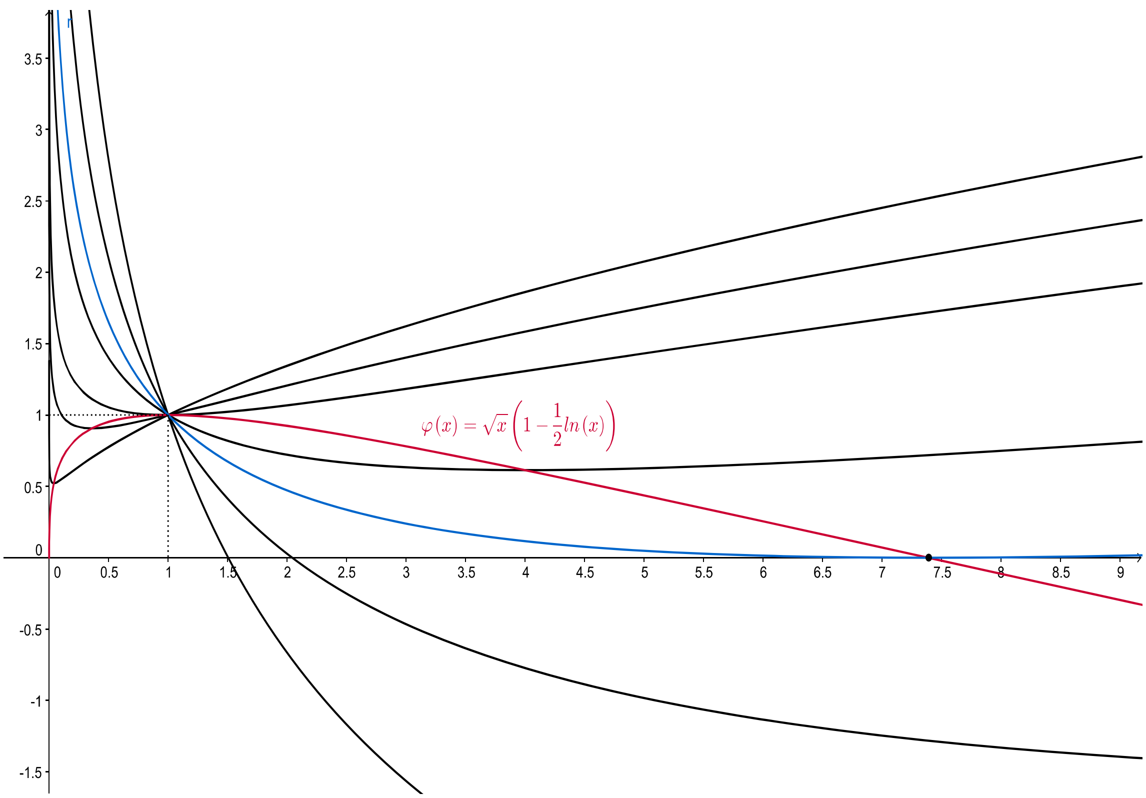
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)+\sqrt{x}\left(0-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)-\frac{\sqrt{x}}{2x}\\ &=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{\ln x}{4\sqrt{x}}\end{aligned}$$

On a donc :

- Si $x\in\left]0\,;1\right[$, $\ln x<0$ et $\varphi'(x)>0$.
- $\varphi'(1)=0$.
- Si $x>1$, $\ln x>0$ et $\varphi'(x)<0$.

La fonction φ est donc strictement croissante sur $\left]0\,;1\right]$ et strictement décroissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$. On en fournit ci-dessous la courbe représentative (en rouge).



Remarque : la courbe représentative de la fonction φ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x telle que $\varphi(x)=\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2}\ln x\right)=0$, soit $\ln x=2$, d'où $x=e^2$.

C'est l'abscisse du minimum de la fonction $f_{\frac{e}{2}}$ (courbe bleue).