« Ce qui est simple est faux.
Ce qui est compliqué est inutilisable. »
Paul VALERY

Corrigé

Exercice N°1

1. On a classiquement : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$.

   Pour tout x réel strictement positif, on a alors : $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

   Comme : $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, le théorème des gendarmes nous donne directement :

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$$

   De façon analogue, pour tout x réel strictement négatif, on a : $-\frac{1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x}$.

   Comme : $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$, le théorème des gendarmes nous donne encore :

   $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$$

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x} = 0}$$

2. Le numérateur de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est défini sur $\mathbb{R}$ et sont dénominateur s'annule pour $x = 0$ uniquement. L'ensemble de définition de cette fonction est donc $\mathbb{R}^*$.

   La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est donc celui de l'argument de l'exponentielle, à savoir celui de la fonction inverse. Celle-ci étant définie sur $\mathbb{R}^*$, l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est également $\mathbb{R}^*$.

   En définitive, l'ensemble de définition de la fonction φ est l'intersection des deux ensembles de définition obtenu ci-dessus : $\mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$.

   $$\boxed{\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[}$$

3. En $-\infty$, on a, d'après la première question : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. Par ailleurs, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim_{X\to 0}e^X=1$. On en déduit (composition) : $\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$.

Il vient alors (produit) : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{x}}=0$.

La courbe représentative de la fonction φ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$.

En $+\infty$, on obtient des résultats similaires : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$.

D'où : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{x}}=0$.

La courbe représentative de la fonction φ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$.

En 0 à gauche, on a d'abord la limite classique : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Par ailleurs : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$ et $\lim_{X\to-\infty}e^X=0$. D'où (composition) : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}e^{\frac{1}{x}}=0$.

On en déduit (produit) : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{x}}=0$.

La courbe représentative de la fonction φ admet donc un point asymptote quand x tend vers 0 à gauche : il s'agit du point de coordonnées $(0\,;0)$, soit l'origine du repère !

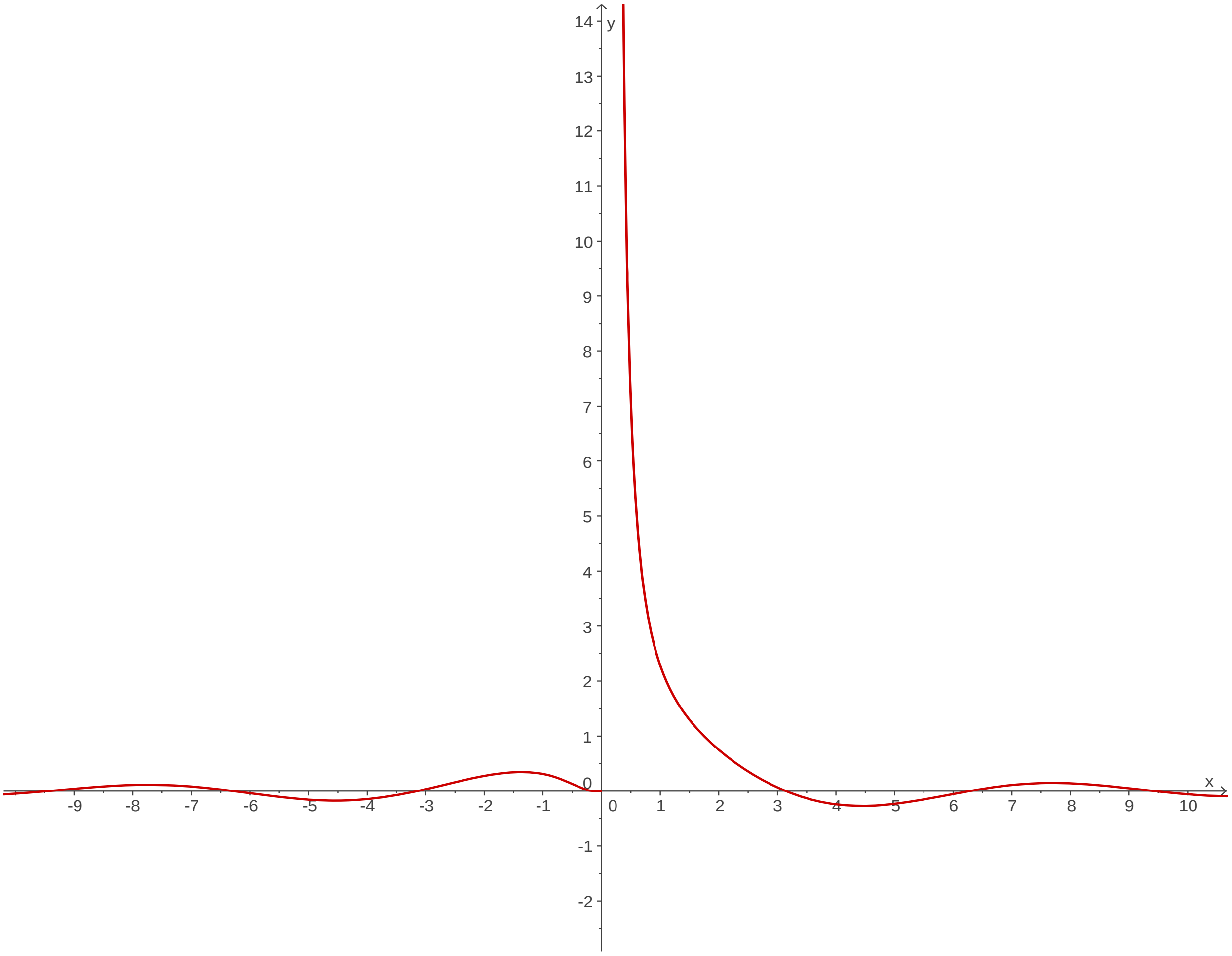
En 0 à droite, on a encore : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Par ailleurs : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}e^X=+\infty$. D'où (composition) : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

On en déduit (produit) : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

La courbe représentative de la fonction φ admet donc une asymptote verticale d'équation $x=0$.

A titre de complément, nous fournissons ci-après la courbe représentative de la fonction φ.



Exercice N°2

On pose, pour tout x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x)=e^{\sqrt{\cos x}}$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{\cos x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.

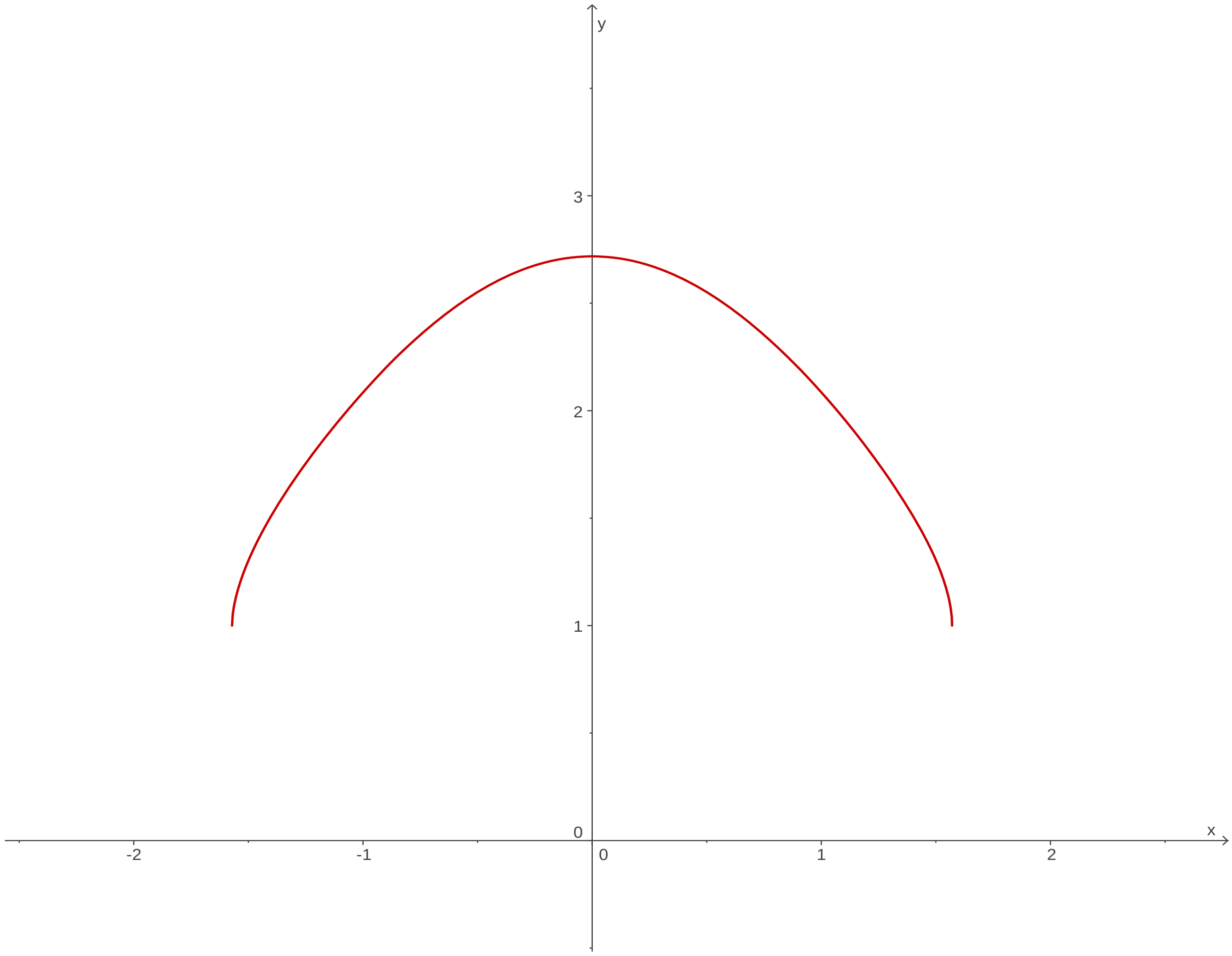
Mais pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $f'(x)=-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}e^{\sqrt{\cos x}}$.

D'où : $f'(0)=-\dfrac{\sin 0}{2\sqrt{\cos 0}}e^{\sqrt{\cos 0}}=0$.

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{\cos x}}-e}{x}=0}$$

A titre de complément, nous fournissons ci-après la courbe représentative de la fonction f.



Exercice N°3

1. On doit vérifier : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$.

   Pour tout x réel, on a :

$$f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x)$$
$$f''(x) = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$$

   On en déduit, pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) &= -2e^x \sin x - 2e^x(\cos x - \sin x) + 2e^x \cos x \\ &= e^x(-2\sin x - 2\cos x + 2\cos x + 2\cos x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction *f* est solution de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 2y = 0$.

2. Notons F une primitive quelconque de *f* sur $\mathbb{R}$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = f(x)$.

   Comme : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{2} f''(x) + f'(x)$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = -\frac{1}{2} f''(x) + f'(x)$.

Mais : $-\frac{1}{2}f''+f'=\left(-\frac{1}{2}f'+f\right)'$. On en déduit alors : $\mathrm{F}=-\frac{1}{2}f'+f+C$, où C est une constante réelle quelconque. C'est-à-dire, pour tout x réel :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x)&=-\frac{1}{2}f'(x)+f(x)+C\\&=-\frac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)+e^x\cos x+C\\&=\frac{1}{2}e^x(-\cos x+\sin x+2\cos x)+C\\&=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C\end{aligned}$$

Les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mapsto \mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$$

où C est une constante réelle quelconque

3. Soit G la primitive cherchée. D'après la question précédente, elle est de la forme :

$$\mathrm{G}:x\mapsto\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$$

D'après l'énoncé, G doit vérifier : $\mathrm{G}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

On a :

$$\begin{aligned}&\mathrm{G}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\\\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)+C=0\\\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+C=0\\\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}+C=0\\\Leftrightarrow\ &C=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

Finalement :

La primitive de la fonction f qui s'annule pour $x=\frac{\pi}{4}$ est la fonction G définie par :

$$\mathrm{G}:x\mapsto\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$$