« Espèce de logarithme … »
Le capitaine Haddock dans « Objectif Lune » HERGE

CORRIGE

Exercice 1 – Question de cours (2 points)

Rappeler et démontrer la propriété algébrique fondamentale du logarithme népérien.

Il s'agissait bien sûr de la propriété : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
Cf. le cours.

Exercice 2 (1,5 point)

Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\ln\left(e^x + 3x\right) - x = \ln\left(1 + 3\frac{x}{e^x}\right)$$

On note d'abord que pour tout réel x strictement positif, on a : $e^x > 0$ et $e^x + 3x > 0$. Nous pouvons donc « tranquillement » manipuler les logarithmes népériens …

On pouvait partir du membre de gauche :

$$\ln\left(e^x + 3x\right) - x = \ln\left(e^x + 3x\right) - \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{e^x + 3x}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{3x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + 3\frac{x}{e^x}\right)$$

ou du membre de droite :

$$\ln\left(1 + 3\frac{x}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x + 3x}{e^x}\right) = \ln\left(e^x + 3x\right) - \ln\left(e^x\right)$$

Exercice 3 (2,5 points)

Résoudre :

$$\ln(x-13) \geq 2\ln(x+3)$$

$\ln(x-13)$ est défini si, et seulement si : $x-13>0$, c'est-à-dire $x>13$.
$\ln(x+3)$ est défini si, et seulement si : $x+3>0$, c'est-à-dire $x>-3$.
On a :

$$\begin{cases} x>13 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow x>13$$

On résout donc l’inéquation dans l’intervalle : $]13\,;+\infty[$.

Pour tout réel x strictement supérieur à 13, on a :

$$\begin{aligned} & \ln(x-13) \geq 2\ln(x+3) \\ \Leftrightarrow\ & \ln(x-13) \geq \ln\left[(x+3)^2\right] \\ \Leftrightarrow\ & x-13 \geq (x+3)^2 \\ \Leftrightarrow\ & x-13 \geq x^2+6x+9 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+5x+22 \leq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant Δ associé au trinôme $x^2+5x+22$ vaut : $\Delta = 5^2-4\times1\times22 = 25-88 = -63$.
Puisqu’il est strictement négatif, le trinôme $x^2+5x+22$ ne s’annule pas et garde un signe constant, celui du coefficient de « x^2 » qui vaut 1. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+5x+22>0$ et l’inéquation n’admet pas de solution.

L’inéquation $\ln(x-13) \geq 2\ln(x+3)$ n’admet pas de solution.

Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=\ln\left(x+3e^x\right)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Montrer que $f(x)-(x+\ln 3)=\ln\left(1+\dfrac{x}{3e^x}\right)$. En déduire le signe de $f(x)-(x+\ln 3)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+\ln 3)\right]$. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
4. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. Représenter, dans un même repère, $\mathscr{T}$, $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y=x+\ln 3$.

Question 1.

On a immédiatement :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3e^x=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+3e^x\right)=+\infty\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x+3e^x\right)=+\infty$$

Finalement :

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

Question 2.

$$\begin{aligned}f(x)-(x+\ln 3)&=\ln\left(x+3e^x\right)-(x+\ln 3)\\&=\ln\left(x+3e^x\right)-\left(\ln\left(e^x\right)+\ln 3\right)\\&=\ln\left(x+3e^x\right)-\ln\left(3e^x\right)\\&=\ln\left(\frac{x+3e^x}{3e^x}\right)\\&=\ln\left(\frac{x}{3e^x}+1\right)\\&=\ln\left(1+\frac{x}{3e^x}\right)\end{aligned}$$

On a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x)-(x+\ln 3)=\ln\left(1+\frac{x}{3e^x}\right)$$

Comme x est positif, on a : $\frac{x}{3e^x} \geq 0$, d'où : $1+\frac{x}{3e^x} \geq 1$ et donc (croissance de la fonction logarithme népérien) : $\ln\left(1+\frac{x}{3e^x}\right) \geq \ln 1 = 0$.

En définitive :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x)-(x+\ln 3)=\ln\left(1+\frac{x}{3e^x}\right) \geq 0$$

Question 3.

On a, d'après la question précédente : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+\ln 3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{3e^x}\right)$.

Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{3e^x}\right)=1+0=1$.

Comme $\lim\limits_{X\to 1}\ln X = \ln 1 = 0$ (continuité de la fonction logarithme népérien en 1), on a (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{3e^x}\right)=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+\ln 3)\right]=0$$

On en déduit que :

La courbe représentative de la fonction *f* admet au voisinage de $+\infty$
la droite d'équation $y = x+\ln 3$ pour asymptote.

Question 4.

Pour tout x réel positif, on pose $u(x)=x+3e^x$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et on a facilement : $\forall x \in \mathbb{R}_+, u'(x)=1+3e^x$.

On en déduit alors immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1+3e^x}{x+3e^x}$.

Pour tout x réel positif, on a : $e^x \geq 1$ et donc $1+3e^x \geq 4 > 0$ et $x+3e^x \geq 3 > 0$.
D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) > 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Question 5.

L'équation réduite de $\mathscr{T}$ s'écrit : $y = f'(0)\times(x-0)+f(0) = f'(0)\times x + f(0)$.

On a : $f(0) = \ln\left(0+3\times e^0\right) = \ln(3\times 1) = \ln 3$ et $f'(0) = \dfrac{1+3\times e^0}{0+3\times e^0} = \dfrac{4}{3}$.
L'équation cherchée s'écrit donc : $y = \dfrac{4}{3}x + \ln 3$.

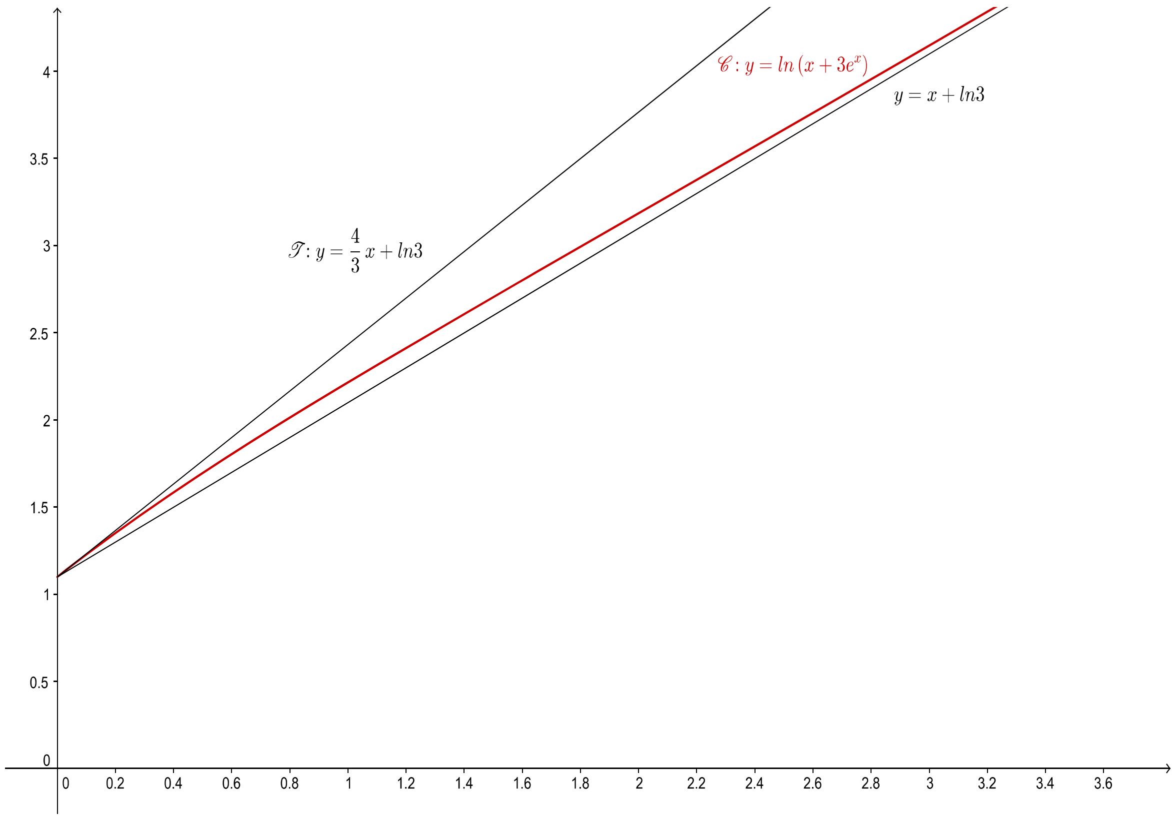
$$\boxed{\mathscr{T} : y = \frac{4}{3}x + \ln 3}$$

Question 6.

A partir des éléments précédents, on obtient facilement :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	
f	$\ln 3$ $\nearrow$	$+\infty$

Question 7.


$\mathscr{C} : y = ln\,(x + 3e^x)$
$y = x + ln3$
$\mathscr{T} : y = \frac{4}{3}x + ln3$
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
2.6
2.8
3
3.2
3.4
3.6