« D'impossibles à imaginaires, d'imaginaires à complexes.
Combien d'idées, de systèmes politiques, de théories, de procédés
ont suivi ce chemin pour devenir réalité ? »
Denis GUEDJ
« Le théorème du perroquet »

Interrogation N°5
2ème partie

Corrigé

Exercice 1 – Un peu de géométrie pour … se mettre en jambe !

On a :

$$|z| = |z^2| \Leftrightarrow |z| = |z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 - |z| = 0 \Leftrightarrow |z|(|z|-1) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ ou } |z| = 0$$

En notant O l'origine du plan complexe et M le point d'affixe z :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{M} = \mathrm{O}$.
- $|z| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{OM} = 1 \Leftrightarrow$ M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

En définitive, l'ensemble $\mathscr{S}$ des points cherchés est la réunion du point O et du cercle $\mathscr{C}$:

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{C} \cup \{\mathrm{O}\}}$$

Exercice 2 – Et encore un peu plus …

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. Dans cette question, on donne les points : $\mathrm{A}(1+i)$, $\mathrm{B}(3+2i)$ et $\mathrm{C}\left(3-\sqrt{3}+\left(2+2\sqrt{3}\right)i\right)$.

   Déterminons les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
   On a :

   - $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = b - a = (3+2i)-(1+i) = 2+i$;
   - $z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} = c - a = \left(3-\sqrt{3}+\left(2+2\sqrt{3}\right)i\right)-(1+i) = 2-\sqrt{3}+\left(1+2\sqrt{3}\right)i$;
   - $z_{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} = c - b = \left(3-\sqrt{3}+\left(2+2\sqrt{3}\right)i\right)-(3+2i) = -\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$.

Il vient alors :

- $\text{AB} = \left|z_{\overrightarrow{\text{AB}}}\right| = |2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$;
- $\text{AC} = \left|z_{\overrightarrow{\text{AC}}}\right| = \left|2-\sqrt{3}+\left(1+2\sqrt{3}\right)i\right| = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
- $\text{BC} = \left|z_{\overrightarrow{\text{BC}}}\right| = \left|-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i\right| = \sqrt{3}|-1+2i| = \sqrt{3}\sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{3}\sqrt{5}$.

On a alors immédiatement : $\text{AB}^2+\text{BC}^2=\text{AC}^2$ et la réciproque du théorème de Pythagore nous permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Le triangle ABC est rectangle en B.}}$$

On s'intéresse maintenant à l'angle : $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

On a : $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \arg\dfrac{c-a}{b-a} = \arg\dfrac{z_{\overrightarrow{\text{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\text{AB}}}}$.

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{z_{\overrightarrow{\text{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\text{AB}}}} &= \frac{2-\sqrt{3}+\left(1+2\sqrt{3}\right)i}{2+i} = \frac{\left[2-\sqrt{3}+\left(1+2\sqrt{3}\right)i\right](2-i)}{(2+i)(2-i)} \\
&= \frac{\left(4\cancel{-2\sqrt{3}}+1\cancel{+2\sqrt{3}}\right)+i\left(\cancel{-2}+\sqrt{3}\cancel{+2}+4\sqrt{3}\right)}{2^2+1^2} \\
&= \frac{5+5i\sqrt{3}}{5} = 1+i\sqrt{3} \\
&= 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

On a immédiatement : $\arg\dfrac{z_{\overrightarrow{\text{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\text{AB}}}} = \arg\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$

Finalement :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)}$$

2. Dans cette question, on donne les points : $\text{A}(1+i)$ et $\text{B}(2-i)$.

   On a d'abord, A et B étant distincts : $\text{AC} = 2\text{AB} \Leftrightarrow |c-a| = 2|b-a| \Leftrightarrow \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 2$.

   Par ailleurs : $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

On déduit de ce qui précède : $\dfrac{c-a}{b-a}=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$.

D'où : $c=2i(b-a)+a=2i\left[(2-i)-(1+i)\right]+(1+i)=2i(1-2i)+1+i=2i+4+1+i=5+3i$.

$$\boxed{\mathrm{C}(5+3i)}$$

Exercice 3 – Une somme … qui vous dit quelque chose … Non ? ☺

Cet exercice est, à mes indications près, l'exercice 151 de la page 291 de votre livre.
Il est corrigé dans le recueil d'exercices sur les complexes.