CORRIGE

La calculatrice est autorisée.

Exercice N°1 (1+3 points)

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$. On pose $z' = z - i$.

a) Exprimer $\mathrm{Im}(z')$ en fonction de *x* et *y*.

b) Donner la forme algébrique de $\dfrac{1}{z'}$.

a) Avec $z = x + iy$, il vient $z' = z - i = (x+iy) - i = x + i(y-1)$ et donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(z') = y - 1}$$

b) Ensuite :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z'} &= \frac{1}{x+i(y-1)} \\
&= \frac{x-i(y-1)}{[x+i(y-1)]\times[x-i(y-1)]} \\
&= \frac{x-i(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x}{x^2+(y-1)^2} + \frac{-(y-1)}{x^2+(y-1)^2}i
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{z'} = \frac{x}{x^2+(y-1)^2} + \frac{-(y-1)}{x^2+(y-1)^2}i}$$

Exercice N°2 (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z\overline{z} = z^2$$

On a :

$$\begin{aligned} & z\overline{z} = z^2 \\ \Leftrightarrow\ & z^2 - z\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z \times \left(z - \overline{z}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z \times 2i\,\mathrm{Im}\left(z\right) = 0 \Leftrightarrow z \times \mathrm{Im}\left(z\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z = 0 \text{ ou } \mathrm{Im}\left(z\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z = 0 \text{ ou } z \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $z\overline{z} = z^2$ est l'ensemble des réels.

Exercice N°3 (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\frac{2z+7i}{z-1} = \frac{z+5}{2z-7i}$$

Les fractions sont définies pour tout complexe z tel que $z-1 \neq 0$ et $2z-7i \neq 0$, soit pour tout complexe dans $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{1\,;\frac{7}{2}i\right\}$. On résout finalement l'équation dans cet ensemble que nous notons E.

On a alors, pour tout complexe z de E :

$$\begin{aligned} & \frac{2z+7i}{z-1} = \frac{z+5}{2z-7i} \\ \Leftrightarrow\ & \left(2z+7i\right)\left(2z-7i\right) = \left(z-1\right)\left(z+5\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left(2z\right)^2 - \left(7i\right)^2 = z^2 + 5z - z - 5 \\ \Leftrightarrow\ & 4z^2 + 49 = z^2 + 4z - 5 \\ \Leftrightarrow\ & 3z^2 - 4z + 54 = 0 \end{aligned}$$

On a affaire à une équation du second degré à coefficients réels.

On a : $\Delta = (-4)^2 - 4\times 3\times 54 = 4\times(4-3\times 54) = 4\times(-158) = -4\times 158$.
Comme $\Delta < 0$, on va obtenir deux racines conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-4) - i\sqrt{-(-4\times 158)}}{2\times 3} = \frac{4-2i\sqrt{158}}{2\times 3} = \frac{2-i\sqrt{158}}{3}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{2+i\sqrt{158}}{3}$$

Ces deux complexes sont différents de 1 (leurs parties imaginaires sont non nulles) et de $\frac{7}{2}i$ (leur partie réelle est non nulle) et on en déduit finalement :

$$\boxed{\text{L'équation } \frac{2z+7i}{z-1} = \frac{z+5}{2z-7i} \text{ admet pour solutions : } z_1 = \frac{2-i\sqrt{158}}{3} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{2+i\sqrt{158}}{3}.}$$