« Lorsqu'on a la prétention, comme moi, d'entraîner les gens dans l'imaginaire,
il faut pouvoir les ramener dans le réel, ensuite... et sans dommage ! »
Raymond DEVOS

On traitera AU CHOIX l'exercice 4 ou l'exercice 5.

Exercice 1 – Un peu d'originalité … N'est-ce pas ? ☺

On considère le complexe : $z = 1 - i$. Calculer : $1 + z + z^2 + ... + z^{2010} = \sum_{n=0}^{2010} z^n$

Exercice 2 – Un bien difficile … Non ?

On considère le complexe : $z = \frac{-3i}{1 + i\sqrt{3}}$. Calculer, pour tout entier n : $\left|z^n\right|$.

Exercice 3 – Une donnée fondamentale (comme souvent !).

Soit z et z' des complexes de module égal à 1.

1. Montrer que $\frac{z^2 - 1}{z}$ est imaginaire pur ;
2. On suppose que $z' \neq z$. Montrer que $\frac{zz' - 1}{z' - z}$ est réel ;

Exercice 4 – Lieux.

Soit z un complexe différent de 3 et z' le complexe défini par : $z' = \frac{1 - 3z}{3 - z}$.
Quel est l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que z' soit réel ? Imaginaire pur ?

Exercice 5 – Où l'on n'oubliera pas que $i^2 = -1$ …

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier n non nul, on a :

$$1 + 2i + 3i^2 + ... + ni^{n-1} = \frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2}$$

2. En déduire que pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$1 - 3 + 5 - 7 + ... + (-1)^k (2k+1) = (-1)^k (k+1)$$

$$2 - 4 + 6 - ... + (-1)^{k-1} 2k = \frac{1 - (-1)^k (2k+1)}{2}$$