

« La passion est une existence primitive ou,
si vous le voulez, un mode primitif d'existence. »
David HUME – *Traité de la nature humaine*

CORRIGE

Exercice 1 (4 points)

Déterminer les primitives, sur l'intervalle considéré, de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{-5x^6 + 6x^2 - 7}{x^3}$ sur \mathbb{R}_+^* .
- $g(x) = \frac{x^3 + x}{12\sqrt{x^4 + 2x^2 + 21}}$ sur \mathbb{R} .

$$\text{On a : } f(x) = \frac{-5x^6 + 6x^2 - 7}{x^3} = -5x^3 + \frac{6}{x} - \frac{7}{x^3} = -5x^3 + \frac{6}{x} - 7x^{-3}.$$

On considère une primitive de chacun des termes et on ajoute une constante. Les primitives de f sur \mathbb{R}_+^* s'écrivent alors :

$$F(x) = -5 \times \frac{1}{4} x^4 + 6 \times \ln x - 7 \times \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C = -\frac{5}{4} x^4 + 6 \ln x + \frac{7}{2x^2} + C$$

Les primitives de la fonction f sur \mathbb{R}_+^* sont les fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{5}{4} x^4 + 6 \ln x + \frac{7}{2x^2} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

$$\text{Posons } u(x) = x^4 + 2x^2 + 21.$$

La fonction u est définie sur \mathbb{R} (et, soit dit en passant, y prend des valeurs strictement positives) et y est dérivable en tant que fonction polynôme.

$$\text{Pour tout } x \text{ réel, on a : } u(x) = 4x^3 + 4x = 4(x^3 + x).$$

$$\text{Ainsi : } g(x) = \frac{x^3 + x}{12\sqrt{x^4 + 2x^2 + 21}} = \frac{\frac{1}{4}u'(x)}{12\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{48} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Les primitives de g sur \mathbb{R} s'écrivent alors :

$$G(x) = \frac{1}{48} \times 2\sqrt{u(x)} + C = \frac{1}{24}\sqrt{x^4 + 2x^2 + 21} + C$$

Les primitives de la fonction g sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme :

$$G(x) = \frac{1}{24}\sqrt{x^4 + 2x^2 + 21} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

Exercice 2 (6 points)

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer la primitive sur l'intervalle considéré et vérifiant la condition initiale :

- $r(x) = (3x-7)^4$ sur \mathbb{R} avec $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$.
- $s(x) = \cos x \times e^{2\sin x}$ sur \mathbb{R} avec $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et $y_0 = e^{\sqrt{2}}$.

$r(x)$ est de la forme $(u(x))^4$ avec $u(x) = 3x-7$.

Comme $u'(x) = 3$, on peut écrire : $r(x) = (3x-7)^4 = \frac{1}{3} \times 3 \times (3x-7)^4 = \frac{1}{3} \times u'(x) \times (u(x))^4$.

Les primitives de la fonction r sont donc les fonctions de la forme :

$$R: x \mapsto \frac{1}{3} \times \frac{1}{4+1} \times (u(x))^{4+1} + C = \frac{1}{15}(3x-7)^5 + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

On cherche alors C de telle sorte que : $R(3) = 1$.

$$\text{On a } R(3) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{15}(3 \times 3 - 7)^5 + C = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{15} \times 2^5 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 - \frac{32}{15} = -\frac{17}{15}.$$

En définitive :

La primitive sur \mathbb{R} de la fonction $r: x \mapsto (3x-7)^4$ et qui prend la valeur 1 pour $x = 3$

est la fonction définie par :

$$R: x \mapsto \frac{1}{15}(3x-7)^5 - \frac{17}{15}$$

Pour la fonction s , posons $u(x) = 2 \sin x$.

On a alors : $u'(x) = 2 \cos x$ et on peut écrire : $s(x) = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$.

Les primitives de la fonction s sont donc les fonctions de la forme :

$$S : x \mapsto \frac{1}{2}e^{u(x)} + C = \frac{1}{2}e^{2\sin x} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

On cherche alors C de telle sorte que : $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\sqrt{2}}$.

$$\text{On a } S\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2\sin\frac{\pi}{4}} + C = e^{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} + C = e^{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}} + C = e^{\sqrt{2}} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}}.$$

En définitive :

La primitive sur \mathbb{R} de la fonction $s : x \mapsto \cos x \times e^{2\sin x}$ et qui prend la valeur $e^{\sqrt{2}}$ pour $x = \frac{\pi}{4}$

est la fonction définie par :

$$S : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2\sin x} + \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}}$$

Exercice 3 (4 points)

- Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}(x-1)(x+1)$ est une primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction $f : x \mapsto x \ln x$.
- Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1; e]$.

- Pour tout x réel strictement positif, on a : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}(x^2 - 1)$.

La fonction F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle : la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \ln x$ (elle-même dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^*) et la fonction polynôme $x \mapsto -\frac{1}{4}(x^2 - 1)$.

D'où, pour tout x réel strictement positif :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \left(2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{4} \times 2x = x \ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln x$$

On a bien :

La fonction F est une primitive de la fonction $f : x \mapsto x \ln x$ sur \mathbb{R}_+^* .

2. Soit m la valeur moyenne cherchée.

On a :

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{e-1} \int_1^e f(x) dx \\
 &= \frac{1}{e-1} \int_1^e x \ln x dx \\
 &= \frac{1}{e-1} \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} (x-1)(x+1) \right]_1^e \\
 &= \frac{1}{e-1} \left\{ \frac{1}{2} \times e^2 \times \ln e - \frac{1}{4} (e-1)(e+1) - \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \ln 1 - \frac{1}{4} (1-1)(1+1) \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{e-1} \left\{ \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - 1) \right\} \\
 &= \frac{1}{e-1} \left\{ \frac{1}{4} (2e^2 - (e^2 - 1)) \right\} \\
 &= \frac{1}{e-1} \left\{ \frac{1}{4} (e^2 + 1) \right\} \\
 &= \frac{e^2 + 1}{4(e-1)}
 \end{aligned}$$

$$m = \frac{1}{e-1} \int_1^e f(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4(e-1)}$$

Exercice 4 (6 points)

Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx$ où $h(x) = 5 \sin x (3 + \cos x)^3$.
- $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \varphi(t) dt$ où $\varphi(t) = \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 3}$.

Posons $u(x) = 3 + \cos x$, définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On a immédiatement, pour tout x réel : $u'(x) = 0 - \sin x = -\sin x$.

On en déduit : $h(x) = 5 \sin x (3 + \cos x)^3 = -5 \times (-\sin x) \times (3 + \cos x)^3 = -5 \times u'(x) \times (u(x))^3$.

On en déduit alors que la fonction $H : x \mapsto -5 \times \frac{1}{3+1} \times (u(x))^{3+1} = -\frac{5}{4} (3 + \cos x)^4$ est une primitive de la fonction h sur \mathbb{R} .

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin x (3 + \cos x)^3 dx = \left[-\frac{5}{4} (3 + \cos x)^4 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{5}{4} \left(3 + \cos \frac{\pi}{2} \right)^4 - \left\{ -\frac{5}{4} (3 + \cos 0)^4 \right\} \\ &= -\frac{5}{4} \times 3^4 + \frac{5}{4} \times 4^4 = \frac{5}{4} \times (-81 + 256) = \frac{5 \times 175}{4} \\ &= \frac{875}{4} \end{aligned}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin x (3 + \cos x)^3 dx = \frac{875}{4} = 218,75$

Posons maintenant $u(t) = e^{2t} + 3$, définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On a immédiatement, pour tout t réel : $u'(t) = 2e^{2t} + 0 = 2e^{2t}$.

On en déduit : $\varphi(t) = \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 3} = \frac{1}{2} \times \frac{2e^{2t}}{e^{2t} + 3} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(t)}{u(t)}$.

Comme on a $u(t) = e^{2t} + 3 > 0$ pour tout réel t , on en déduit alors que la fonction

$\Phi : t \mapsto \frac{1}{2} \times \ln(u(t)) = \frac{1}{2} \times \ln(e^{2t} + 3)$ est une primitive de la fonction φ sur \mathbb{R} .

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln 3} \varphi(t) dt &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 3} dt = \left[\frac{1}{2} \times \ln(e^{2t} + 3) \right]_{\ln 2}^{\ln 3} \\ &= \frac{1}{2} \times \ln(e^{2 \times \ln 3} + 3) - \frac{1}{2} \times \ln(e^{2 \times \ln 2} + 3) \\ &= \frac{1}{2} \times \ln(e^{\ln 3^2} + 3) - \frac{1}{2} \times \ln(e^{\ln 2^2} + 3) \\ &= \frac{1}{2} \times \ln(9 + 3) - \frac{1}{2} \times \ln(4 + 3) = \frac{1}{2} (\ln 12 - \ln 7) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{12}{7} \end{aligned}$$

$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \varphi(t) dt = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 3} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{12}{7}$
