

Exercice N°1

1. On cherche les primitives de $f(x) = x^5 - 2x^3 + 8x - 3$ sur $I = \mathbb{R}$.

Primitivation classique d'une fonction polynôme. On primitive terme à terme :

$$\frac{1}{6} \times x^6 - 2 \times \frac{1}{4} \times x^4 + 8 \times \frac{1}{2} \times x^2 - 3 \times x = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + 4x^2 - 3x$$

Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto x^5 - 2x^3 + 8x - 3$ sur \mathbb{R} est la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + 4x^2 - 3x$$

2. On cherche les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}$ sur $I =]0; +\infty[$.

Comme la fonction inverse admet pour dérivée la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$. Par ailleurs, on a, pour tout réel x strictement positif : $-\frac{6}{x^3} = -6 \times x^{-3}$. Cette fonction admet donc pour primitive sur l'intervalle I : $x \mapsto -6 \times \frac{1}{-3+1} \times x^{-3+1} = 3 \times x^{-2} = \frac{3}{x^2}$.

En définitive, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}$ sur $I =]0; +\infty[$ est la fonction :

$$x \mapsto -\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$$

3. On cherche les primitives de : $x \mapsto (1 + \tan^2(x)) \times \tan^3(x)$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$.

On remarque, en posant $u(x) = \tan(x)$, qui donne $u'(x) = 1 + \tan^2(x)$, que l'on a : $(1 + \tan^2(x)) \times \tan^3(x) = u'(x) \times u^3(x)$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x) \times u^3(x)$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{4} \times u^4(x)$ et on en déduit finalement qu'une primitive sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto (1 + \tan^2(x)) \times \tan^3(x)$ est la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{4} \tan^4(x)$$

4. On cherche les primitives de : $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0; +\infty[$.

On remarque, en posant $u(x) = \sqrt{x}$, que l'on a affaire, à un facteur multiplicatif près, à une fonction de la forme $u'(x) \times e^{u(x)}$.

On écrit alors : $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2 \times u'(x) \times e^{u(x)}$ et on en déduit qu'une primitive de $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$ est : $x \mapsto 2 \times e^{u(x)}$, c'est à dire :

$$x \mapsto 2 \times e^{\sqrt{x}}$$

Exercice N°2

1. Pour tout x réel strictement positif, on a :

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2} \times [2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}] - \frac{1}{4} \times 2x = \frac{1}{2} \times [2x \ln(x) + x] - \frac{x}{2} = x \ln(x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln(x) = \varphi(x)$$

On en déduit immédiatement que :

La fonction Φ est une primitive de la fonction φ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. D'après la question précédente, les primitives de la fonction φ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + k, \text{ où } k \text{ est une constante réelle quelconque}$$

D'après l'énoncé, on cherche la primitive de la fonction φ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ s'annulant en e . Le réel k est donc solution de l'équation : $\frac{1}{2}e^2 \ln(e) - \frac{1}{4} \times e^2 + k = 0$ soit $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + k = 0$. On en déduit : $k = -\frac{1}{4}e^2$.
Finalement :

La primitive de la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ s'annulant en e est la fonction définie par :

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}e^2$$

Exercice N°3

On a facilement : $\frac{\ln(x)-5}{\sqrt{x}} = 2 \times \frac{\ln(x)-5}{2\sqrt{x}} = 2 \times \frac{\ln(x)+2-7}{2\sqrt{x}} = 2 \times \left[\frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}} - 7 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right]$.

D'après l'énoncé, la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$.

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ admet pour primitive la fonction racine carrée.

On déduit de ce qui précède que les primitives cherchées sont de la forme :

$x \mapsto 2 \times [\sqrt{x} \ln(x) - 7 \times \sqrt{x}] + k = 2 \times \sqrt{x} \times [\ln(x) - 7] + k$ où k est une constante réelle quelconque.

Finalement :

Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)-5}{\sqrt{x}}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto 2 \sqrt{x} [\ln(x) - 7] + k \text{ où } k \text{ est une constante réelle quelconque.}$$