

**Bac blanc décembre 2009- T°S**  
**Corrigé de l'exercice de spécialité**

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1(2^n).$$

**Partie A :**

1.  $n=2$ , alors  $2^n = 4$  et  $2^n - 1 = 3$ .

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35, \quad 35 = 4 \times 8 + 3, \text{ d'où } 35 \equiv 3(4), \text{ c\`ad } \underline{35 \equiv 2^2 - 1(2^2)}.$$

On a bien :

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1(2^n)}.$$

2.  $n=3$ .

a)  $m \in \mathbb{N}$ .

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

b) D'après le tableau précédent, tout entier naturel au carré est congru à 0, 1 ou 4 modulo 8, c\`ad :

$$x^2 \equiv 0, 1 \text{ ou } 4 \pmod{8}$$

$$y^2 \equiv 0, 1 \text{ ou } 4 \pmod{8}, \text{ or aucune somme de ces nombres pris trois par trois ne donne } 7.$$

$$z^2 \equiv 0, 1 \text{ ou } 4 \pmod{8}$$

Donc on ne peut pas avoir :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\equiv 7(8), \\ \text{donc } x^2 + y^2 + z^2 &\equiv 2^3 - 1(2^3), \\ \text{donc } \boxed{x^2 + y^2 + z^2} &\equiv 2^n - 1(2^n). \end{aligned}$$

**Partie B :**

$$n \geq 3.$$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1(2^n).$$

1. Alors  $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n k + 2^n - 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),

$$\text{soit } x^2 + y^2 + z^2 = 2^n(k+1) - 1.$$

Or  $2^n(k+1)$  est pair, donc  $2^n(k+1) - 1$  est impair.

D'où  $x^2 + y^2 + z^2$  est impair.

Or pour que la somme de trois entiers soit impaire il faut que tous les trois soient impairs ou que deux soient pairs et le troisième impair.

De plus si le carré d'un entier est impair, alors l'entier est impair, en effet si l'entier était pair :  $x = 2k$ , alors  $x^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$  qui est pair !

De même, si le carré d'un entier est pair, alors l'entier est pair.

Finalement :

$$\boxed{x, y \text{ et } z \text{ sont tous trois impairs ou deux seuls d'entre eux sont pairs.}}$$

2. Supposons  $x, y$  pairs et  $z$  impair :

$$x = 2q$$

$$y = 2r$$

$$z = 2s + 1.$$

a) On a alors :

$$x^2 = 4q^2 \text{ donc } x^2 \equiv 0(4)$$

$$y^2 = 4r^2 \text{ donc } y^2 \equiv 0(4)$$

$$z^2 = 4s^2 + 4s + 1 \text{ donc } z^2 \equiv 1(4).$$

D'où par somme,

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1(4)}.$$

b) Si  $x, y$  pairs et  $z$  impair, on a  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1(4)$ .

On veut :  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1(2^n)$ ,

$$\text{càd } x^2 + y^2 + z^2 = 2^n q + 2^n - 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^n(q+1) - 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^2 \times 2^{n-2}(q+1) - 1 \text{ (car } n \geq 3 \text{ donc } n > 2 \text{ donc on peut écrire } 2^n = 2^2 \times 2^{n-2})$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a - 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1(4)$$

$$\underline{x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3(4)}$$

et on a vu que c'était impossible dans le a).

Finalement si  $x, y$  pairs et  $z$  impair,

$$\text{on ne peut pas avoir } \boxed{x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1(2^n)}.$$

3. Supposons  $x, y$  et  $z$  impairs :

a) Si  $k$  est pair, alors  $k^2$  est pair (voir plus haut), donc  $k^2 + k$  est divisible par 2.

Si  $k$  est impair, alors  $k^2$  est impair, donc  $k^2 + k$  est pair, d'où  $k^2 + k$  est divisible par 2.

b) On a :

$$x = 2q + 1$$

$$y = 2r + 1$$

$$z = 2s + 1.$$

$$x^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4(q^2 + q) + 1$$

$$y^2 = 4r^2 + 4r + 1 = 4(r^2 + r) + 1$$

$$z^2 = 4s^2 + 4s + 1 = 4(s^2 + s) + 1.$$

Or, d'après le a),  $q^2 + q$ ,  $r^2 + r$ ,  $s^2 + s$  sont divisibles par 2, quels que soient les entiers naturels,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ .

D'où :

$$4(q^2 + q) = 4q^2 + 4q \text{ est divisible par 8,}$$

$$4(r^2 + r) = 4r^2 + 4r \text{ est divisible par 8,}$$

$$4(s^2 + s) = 4s^2 + 4s \text{ est divisible par 8.}$$

D'où on peut écrire :

$$x^2 = 8Q + 1 \text{ d'où } x^2 \equiv 1(8)$$

$$y^2 = 8Q + 1 \text{ d'où } y^2 \equiv 1(8)$$

$$z^2 = 8Q + 1 \text{ d'où } z^2 \equiv 1(8)$$

$$\text{D'où } \boxed{x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3(8)}.$$

c) Donc on n'a pas  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^3 - 1(2^3)$ , ou encore  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7(8)$ .

On veut :  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1(2^n)$ ,

càd  $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n q + 2^n - 1$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^n (q+1) - 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^3 \times 2^{n-3} (q+1) - 1 \text{ (car } n \geq 3 \text{ donc on peut écrire } 2^n = 2^3 \times 2^{n-3}\text{)}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^3 a - 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8a - 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1(8)$$

$$\underline{x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7(4)}$$

et on a vu que c'était impossible si  $x, y, z$  sont impairs.

Finalement

on ne peut pas avoir  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1(2^n)$ .

**Conclusion :** si  $n \geq 3$ , l'équation n'a pas de solution.