Durée 4 heures.
La calculatrice graphique est autorisée.

Exercice 1 (commun)

A. Etude de *f* en $+\infty$

1) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}e^x=e^0=1$. Par composition, il vient alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$.
On a immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.
On en déduit finalement (limite d'un produit) :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}xe^{\frac{1}{x}}=+\infty}$$

2) a. Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f(x)-x-1=xe^{\frac{1}{x}}-x-1=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)-x-1=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1}$$

b. On a déjà vu : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\exp'(0)=\exp(0)=e^0=1$
(note : cette limite est censée être connue des élèves et peut être admise).
On en déduit (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}}=1$ et, enfin : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}}-1\right)=0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x-1\right)=0}$$

Du résultat précédent, on tire immédiatement :

La droite Δ d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3) a. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: la fonction exponentielle et la fonction polynôme : $x \mapsto -x-1$.

Pour tout x réel, on a alors :

$$g'(t) = e^t - 1$$

On a alors : $g'(t) > 0 \Leftrightarrow e^t - 1 > 0 \Leftrightarrow e^t > 1 \Leftrightarrow t > 0$.
Par ailleurs : $g'(t) = 0 \Leftrightarrow e^t = 1 \Leftrightarrow t = 0$.

On a donc :

- Pour tout réel t strictement négatif : $g'(t) < 0$ et la fonction g est strictement décroissante ;
- $g'(0) = 0$;
- Pour tout réel t strictement positif : $g'(t) > 0$ et la fonction g est strictement croissante ;

On déduit de cette étude que la fonction g admet un minimum global pour $t = 0$.
Or, on a : $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.
On a donc, pour tout réel t : $g(t) \geq g(0) = 0$, soit : $e^t - t - 1 \geq 0$.

Finalement :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ e^t - t - 1 \geq 0}$$

b. On déduit immédiatement de ce qui précède que la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la droite Δ. En particulier :

Pour tout réel x strictement positif, $\mathscr{C}$ est située au-dessus de Δ.

B. Etude de *f* en $-\infty$

On procède de façon analogue à ce qui a été fait à la première question de la partie A.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$. Par composition, il vient alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

On a immédiatement : $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

On en déduit finalement (limite d'un produit) :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty}$$

C. Etude de *f* en 0

1) Limite à gauche en 0.

   On a : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Par composition, il vient alors : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

   On a immédiatement : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x = 0$.

   On en déduit finalement (limite d'un produit) :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} xe^{\frac{1}{x}} = 0}$$

   Limite à droite en 0.

   On a : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Par composition, il vient alors : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

   On a immédiatement : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x = 0$.

   On a donc affaire à une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ ».

   On peut écrire, pour tout x réel non nul : $f(x) = xe^{\frac{1}{x}} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$.

   Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (croissance comparée), il vient finalement, par composition :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty}$$

2) La limite de la fonction *f* à droite en 0 n'étant pas finie, on en déduit immédiatement :

La fonction *f* n'est pas continue en 0.

Puisque la fonction *f* n'est pas continue en 0, on en déduit immédiatement :

La fonction *f* n'est pas dérivable en 0.

3) Pour étudier la dérivabilité à gauche en 0, il convient d'étudier : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Pour tout réel non nul, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}}$.

Or, on a vu à la question précédente que l'on avait : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

On en déduit :

La fonction *f* est dérivable en 0 à gauche de nombre dérivé égal à 0.

4) D'après la question précédente, la demi-tangente T est horizontale (son coefficient directeur est nul). L'équation réduite de T est donc : $y = k$ où k est une constante à déterminer. Comme T passe par l'origine $\left(f(0)=0\right)$, on a immédiatement : $k = 0$.

Une équation de T, demi-tangente à $\mathscr{C}$ en $\mathrm{O}(0;0)$, est : $y = 0$. T est la demi-droite correspondant aux points d'abscisses négatives de l'axe des abscisses.

D. Fin de l'étude de *f*

1) La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit alors que la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

La fonction identité est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

On déduit finalement de ce qui précède que la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Pour tout réel *x* non nul, on a alors :

$$f'(x) = 1 \times e^{\frac{1}{x}} + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times e^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

La fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives, le signe de la dérivée f' est celui du rapport $\dfrac{x-1}{x}$.

On a immédiatement, en étudiant le signe du produit $x(x-1)$ et en excluant la valeur 0 :

- Pour tout réel x strictement négatif : $f'(x) > 0$;
- Pour tout réel x de l'intervalle $]0;1[$: $f'(x) < 0$;
- $f'(1) = 0$ (et on a : $f(1) = 1 \times e^{\frac{1}{1}} = e$) ;
- Pour tout réel x de l'intervalle $]1;+\infty[$: $f'(x) > 0$.

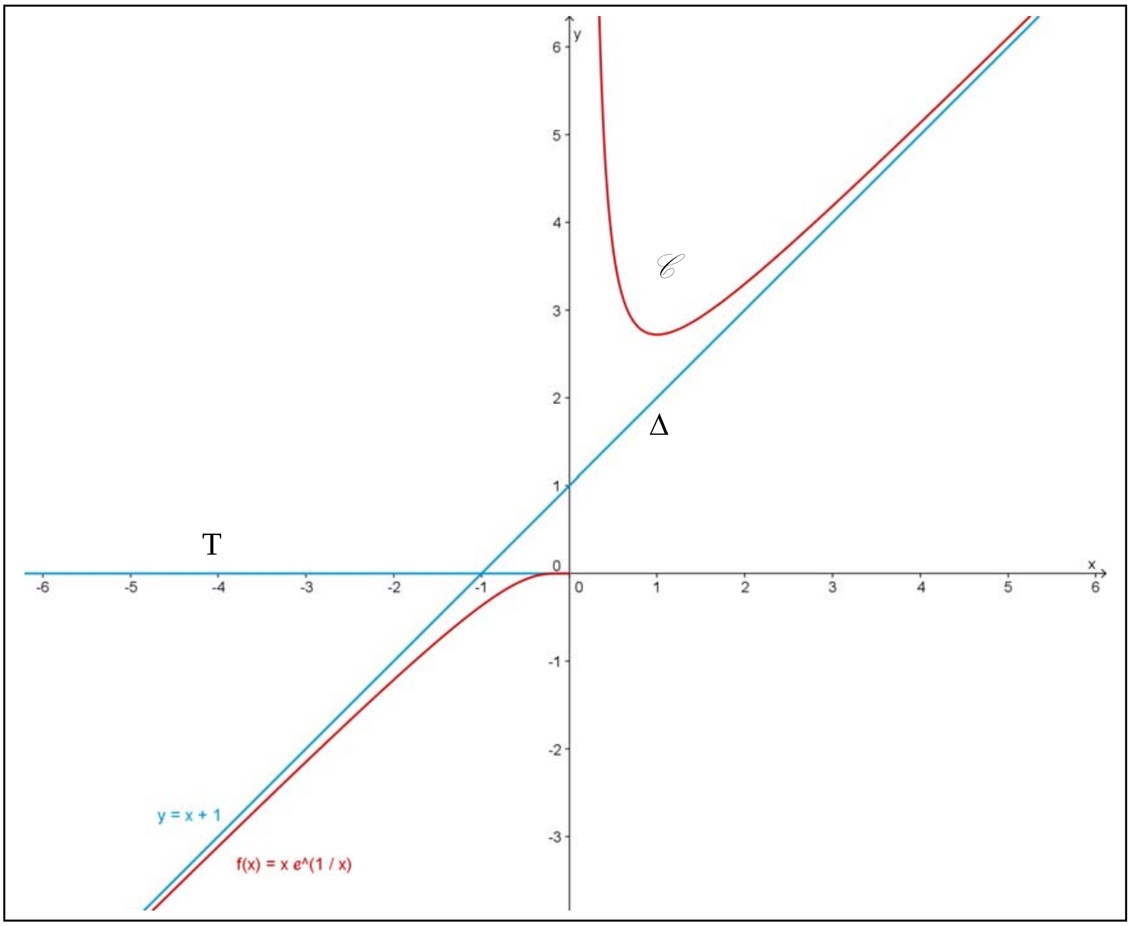
D'où :

- La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;0]$ et $[1;+\infty[$;
- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1]$.

En tenant compte des limites obtenues précédemment, on obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0 ‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

2) On obtient la figure fournie page suivante.



Exercice 2 (commun)

1) Comme F est un primitive de *f*, F est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $F'(x) = f(x)$.

Or, $\forall\, x \geq 0$, $x^3 + 1 > 0$ donc $F'(x) > 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{F est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}.$$

2) a) Prouver par récurrence sur *n* que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

- *Initialisation* :
  Pour $n = 0$, on a $1 + 0a = 1$ et $(1+a)^0 = 1 \geq 1 + 0a$ donc la propriété est vraie.

- *Hérédité* :
  Supposons la propriété vraie à un certain rang *n*, soit $(1+a)^n \geq 1 + na$.

On veut alors prouver que $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$. Or, comme $a \geq 0$, $a+1 \geq 0$ donc on peut écrire, grâce à l'hypothèse de récurrence :

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a)$$

Mais : $(1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2$ et comme $na^2 \geq 0$, on a :

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) Si $\forall\, x \geq 1$, on pose $x = 1+a$, on a $a = x-1 \geq 0$ et le résultat précédent s'applique $\forall\, n \in \mathbb{N}$ donc en particulier pour $n = 3$, ce qui donne :

$$x^3 \geq 1+3(x-1) = 3x-2$$

En ajoutant 1, on obtient bien :

$$\boxed{x^3+1 \geq 3x-1}.$$

3) a) La fonction g est définie et continue sur $[1\,;+\infty[$ en tant que composée de fonctions continues, G est bien définie et dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et il en va de même pour $\mathrm{F}-\mathrm{G}$ avec :

$$(\mathrm{F}-\mathrm{G})'(x) = \mathrm{F}'(x) - \mathrm{G}'(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x) = \sqrt{x^3+1} - \sqrt{3x-1}.$$

D'après la question précédente, on a $x^3+1 \geq 3x-1 \geq 0$ sur $[1\,;+\infty[$ donc $\sqrt{x^3+1} \geq \sqrt{3x-1}$.

Ainsi, $(\mathrm{F}-\mathrm{G})'(x) \geq 0$ et donc :

$$\boxed{\mathrm{F}-\mathrm{G} \text{ est croissante sur } [1\,;+\infty[}.$$

b) On a $\mathrm{F}(1) = \mathrm{G}(1) = 0$.

Comme $\mathrm{F}-\mathrm{G}$ est croissante sur $[1\,;+\infty[$, on a $\forall\, x \geq 1$, $\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x) \geq \mathrm{F}(1) - \mathrm{G}(1) = 0$

Soit :

$$\boxed{\mathrm{F}(x) \geq \mathrm{G}(x)}$$

c) $\mathrm{g}(x) = \sqrt{3x-1} = \frac{1}{3}3(3x-1)^{½}$ donc les primitives de g sur $[1\,;+\infty[$ sont de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^{1+½}}{1+½} + k = \frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

On veut $\mathrm{G}(1) = 0$ donc $\mathrm{G}(1) = \frac{2}{9}(3-1)\sqrt{3-1} + k = \frac{4\sqrt{2}}{9} + k = 0$ soit $k = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{G}(x) = \frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1} - \frac{4\sqrt{2}}{9}}.$$

d) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x-1) = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x-1} = +\infty$. Alors, par produit puis somme, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{G}(x) = +\infty.$$

Comme $\forall\, x \geq 1,\ \mathrm{F}(x) \geq \mathrm{G}(x)$, le théorème des gendarmes (ou comparaison) permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty}.$$

4) Une équation de la tangente à C_{F} au point d'abscisse 1 est donnée par :

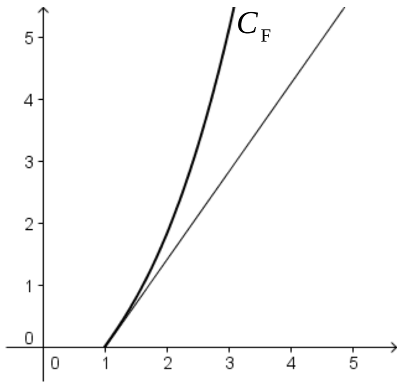
$$y = \mathrm{F}'(1)(x-1) + \mathrm{F}(1)$$

Or, $\mathrm{F}(1) = 0$ et $\mathrm{F}'(1) = \mathrm{f}(1) = \sqrt{2}$ donc l'équation recherchée est :

$$\boxed{y = \sqrt{2}(x-1)}.$$

5) D'après ce qui précède, F est définie sur $[1\,;+\infty[$, croissante de 0 à + ∞ et toujours au dessus de sa tangente d'équation $y=\sqrt{2}(x-1)$ en 1.

On peut alors déduire l'allure suivante pour C_{F} :



Exercice 3 (commun)

1) En remplaçant, dans l'équation fournie, les coefficients par leurs valeurs, on obtient :

$$5i'(t)+10i(t)=20e^{-t}\sin t$$

Soit, en divisant par 5 :

$$i'(t)+2i(t)=4e^{-t}\sin t$$

L'intensité i est bien solution de l'équation différentielle :

$$\boxed{y'+2y=4e^{-t}\sin t \qquad (\mathrm{E})}$$

2) Pour tout t réel, on a :

$$\begin{aligned} g'(t) &= -e^{-t}\left(a\cos t+b\sin t\right)+e^{-t}\left(-a\sin t+b\cos t\right) \\ &= \left[(-a+b)\cos t+(-a-b)\sin t\right]e^{-t} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
&g \text{ solution de } (E)\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ g'(t)+2g(t)=4e^{-t}\sin t\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \left[(-a+b)\cos t+(-a-b)\sin t\right]e^{-t}+2(a\cos t+b\sin t)e^{-t}=4e^{-t}\sin t\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (-a+b)\cos t+(-a-b)\sin t+2(a\cos t+b\sin t)=4\sin t\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (a+b)\cos t+(-a+b)\sin t=4\sin t\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0\\ -a+b=4 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b\\ 2b=4 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2\\ b=2 \end{cases}
\end{aligned}$$

La fonction g définie par :

$$g : t \mapsto -2(\cos t-\sin t)e^{-t}$$

est solution de l'équation différentielle (E).

3) On a :

$$\begin{aligned}
&f \text{ solution de } (\mathrm{E})\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t)+2f(t)=4e^{-t}\sin t\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t)+2f(t)=g'(t)+2g(t)\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t)+2f(t)-g'(t)-2g(t)=0\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t)-g'(t)+2\left[f(t)-g(t)\right]=0\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (f-g)'(t)+2(f-g)(t)=0\\
&\Leftrightarrow f-g \text{ solution de } y'+2y=0
\end{aligned}$$

On a bien :

$$f \text{ solution de } (\mathrm{E}) \Leftrightarrow f-g \text{ solution de } y'+2y=0 \quad (\mathrm{E}')$$

4) On a : $y'+2y=0 \Leftrightarrow y'=-2y$.

On a donc affaire à une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-2$.

D’après le cours, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme : $t \mapsto Ce^{-2t}$, où C est une constante réelle quelconque.

Les solutions de l’équation (E') sont les fonctions de la forme : $$t \mapsto Ce^{-2t}$$ où C est une constante réelle quelconque.

5) D’après la question 3), l’intensité i du courant étant une solution de l’équation différentielle (E), la fonction $i-g$ est solution de l’équation différentielle (E'). Il existe donc une constante réelle C telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (i-g)(t) = Ce^{-2t}$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ i(t) = g(t) + Ce^{-2t} = -2(\cos t - \sin t)e^{-t} + Ce^{-2t}$$

Or, on précise qu’à l’instant $t=0$, l’intensité du circuit est égale à 2 ampères. L’intensité $i(t)$ étant exprimée en ampères, il vient donc :

$$i(0) = -2(\cos 0 - \sin 0)e^{-0} + Ce^{-2\times 0} = -2 + C = 2$$

On en tire immédiatement : $C = 4$.

Il vient donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ i(t) = -2(\cos t - \sin t)e^{-t} + 4e^{-2t}$$

Le temps étant exprimé en secondes, on a : $t = 10ms = 10^{-2}s$ et l’intensité correspondante dans le circuit s’écrit (la valeur approchée est la valeur arrondie au centième d’ampère) :

$$i\left(10^{-2}\right) = -2\left(\cos\left(10^{-2}\right) - \sin\left(10^{-2}\right)\right)e^{-10^{-2}} + 4e^{-2\times 10^{-2}} \simeq 1{,}96$$

L’intensité dans le circuit au bout de 10 millisecondes vaut environ 1,96 ampères (valeur arrondie au centième d’ampère)

Exercice 4 (NON spécialité mathématiques uniquement) [5 points]

1) « AM minimale » équivaut à : « $\forall \mathrm{P} \in \mathscr{H}, \ \mathrm{AP} \geq \mathrm{AM}$ ». Or, les distances étant des réels positifs et la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a l'équivalence :

$$\mathrm{AP} \geq \mathrm{AM} \Leftrightarrow \mathrm{AP}^2 \geq \mathrm{AM}^2$$

On a donc :

$$\begin{gathered}\text{« AM minimale »}\\ \Leftrightarrow \forall \mathrm{P} \in \mathscr{H}, \ \mathrm{AP} \geq \mathrm{AM}\\ \Leftrightarrow \forall \mathrm{P} \in \mathscr{H}, \ \mathrm{AP}^2 \geq \mathrm{AM}^2\\ \Leftrightarrow \text{« } \mathrm{AM}^2 \text{ minimale »}\end{gathered}$$

$$\boxed{\text{« AM minimale »} \Leftrightarrow \text{« } \mathrm{AM}^2 \text{ minimale »}}$$

2) Le point M appartenant à la branche d'hyperbole $\mathscr{H}$, on a : $\mathrm{M}\left(x;\dfrac{1}{x}\right)$ avec $x > 0$.

Or, on a aussi : $\mathrm{A}(1;0)$. D'où : $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\left(x-1;\dfrac{1}{x}\right)$.

Le repère considéré étant orthonormal, on a :

$$d(x) = \mathrm{AM}^2 = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right\|^2 = (x-1)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ d(x) = x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{x^2}}$$

3) La fonction *d* est la somme de la fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 1$ et de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

La première est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc, à fortiori, sur $\mathbb{R}_+^*$.

La seconde est la composée de la fonction carrée et de la fonction inverse. La fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc, à fortiori, sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout x réel strictement positif, on a $x^2 > 0$. La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit finalement que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

En définitive, la fonction *d* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ d'(x) = 2x - 2 - \frac{2}{x^3} = 2\left(x - 1 - \frac{1}{x^3}\right) = 2\frac{x^4 - x^3 - 1}{x^3}$$

Pour tout réel *x* strictement positif, on a : $x^3 > 0$. On en déduit immédiatement que le signe de l'expression obtenue ci-dessus est celui de son numérateur :

> Pour tout réel *x* strictement positif, le signe de $d'(x)$
> est celui de la fonction *f* définie par $f : x \mapsto x^4 - x^3 - 1$.

4) D'après la question précédente, pour étudier le signe de $d'(x)$, il convient d'étudier celui de $f(x)$.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme fonction polynôme et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$$

Pour tout x strictement positif, on a : $x^2 > 0$. On en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de $4x - 3$. On a alors immédiatement :

- Si $x \in \left]0;\frac{3}{4}\right[$, $4x - 3 < 0$ et $f'(x) < 0$;
- $f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0$;
- Si $x \in \left]\frac{3}{4};+\infty\right[$, $4x - 3 > 0$ et $f'(x) > 0$.

En définitive :

> La fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0;\frac{3}{4}\right]$ et
> strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$

5) On a vu, à la question précédente, que la fonction *f* était strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0;\frac{3}{4}\right]$. La conclusion est inchangée si on travaille sur l'intervalle $\left[0;\frac{3}{4}\right]$. Or, $f(0)=0-0-1=-1$. On a donc : $\forall x\in\left]0;\frac{3}{4}\right]$, $f(x)<f(0)=-1$.

La fonction f ne s'annule donc pas sur l'intervalle $\left]0;\frac{3}{4}\right]$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$ en tant que fonction polynôme.
D'après la question précédente, elle est strictement croissante sur cet intervalle.
On vient de voir que l'on avait : $f\left(\frac{3}{4}\right)<0$.
Enfin, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-x^3-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'affirmer que la l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$.

En définitive :

L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$.

En tabulant la fonction *f* avec un pas égal à 1, on obtient d'abord :

$$1<\alpha<2$$

Puis, avec un pas égal à 0,1 :

$$1,3<\alpha<1,4$$

On obtient enfin, avec un pas égal à 0,01 :

$$\boxed{1,38<\alpha<1,39}$$

(note : on pouvait aussi obtenir cet encadrement à partir d'une valeur approchée fournie par la calculatrice)

6) D'après la question 5), on a :

- Si $x\in\left]0;\alpha\right[$, $f(x)<0$;
- $f(\alpha)=0$;
- Si $x\in\left]\alpha;+\infty\right[$, $f(x)>0$.

On en déduit immédiatement :

La fonction *d* est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha;+\infty[$. La fonction *d* admet un minimum pour $x=\alpha$.

7) On a : $\mathrm{M}\left(\alpha;\dfrac{1}{\alpha}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\left(\alpha-1;\dfrac{1}{\alpha}\right)$. Comme $\alpha\neq 1$, la droite (AM) n'est pas verticale et on peut en donner le coefficient directeur : $m=\dfrac{\frac{1}{\alpha}}{\alpha-1}=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-1)}$.

Par ailleurs, la fonction inverse admettant comme dérivée la fonction : $x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{H}$ en M vaut : $m'=-\dfrac{1}{\alpha^2}$.

Il vient alors :

$$mm'+1=\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\times\left(-\frac{1}{\alpha^2}\right)+1=\frac{-1}{\alpha^3(\alpha-1)}+1=\frac{-1+\alpha^3(\alpha-1)}{\alpha^3(\alpha-1)}=\frac{\alpha^4-\alpha^3-1}{\alpha^3(\alpha-1)}=\frac{f(\alpha)}{\alpha^3(\alpha-1)}=0$$

Le repère considéré étant orthonormal, l'égalité $mm'+1=0$ nous permet immédiatement de conclure :

La droite (AM) est perpendiculaire à la tangente à $\mathscr{H}$ en M.

FIN DU CORRIGE