

Corrigé du DTL n°4

Exercice 1

1. Si z_1 est une solution réelle de (E), on a $z_1 \in \mathbb{R}$, $z_1^3 \in \mathbb{R}$ et $z_1^2 \in \mathbb{R}$ donc :

$$\operatorname{Re}(z_1^3 - (4+i)z_1^2 + (7+i)z_1 - 4) = z_1^3 - 4z_1^2 + 7z_1 - 4 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z_1^3 - (4+i)z_1^2 + (7+i)z_1 - 4) = -z_1^2 + z_1.$$

Mais est z_1 solution réelle de (E), donc $z_1^3 - (4+i)z_1^2 + (7+i)z_1 - 4 = 0$ et un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont donc :

- $-z_1^2 + z_1 = z_1(1 - z_1) = 0$ soit $z_1 = 0$ ou $z_1 = 1$.
- $z_1^3 - 4z_1^2 + 7z_1 - 4 = 0$ donc $z_1 = 0$ n'est pas acceptable, mais comme $1 - 4 + 7 - 4 = 0$, $z_1 = 1$ l'est.

Finalement, la seule solution réelle de (E) est $z_1 = 1$.

2. On cherche a et b complexes tels que $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(az+b)$.

Remarquons que si on développe le terme de droite dans l'égalité ci-dessus :

- le terme en z^3 est az^3 donc, par identification, $a = 1$;
- le terme constant est $(2+2i)b$ donc $(2+2i)b = -4$ soit $b = \frac{-4}{2+2i}$ d'où $b = -1+i$.

Vérifions. Pour tout complexe z , on a bien :

$$(z-1)(z-2-2i)(z-1+i) = (z^2 - (3+2i)z + 2+2i)(z-1+i) = z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$$

3. D'après ce qui précède :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z-2-2i)(z-1+i) = 0.$$

Les solutions de (E) sont alors : $z_1 = 1$, $z_2 = 2+2i$ et $z_3 = 1-i$.

Exercice 2

1. a. L'écriture complexe de r est donnée par $z' = e^{\frac{2\pi}{3}}(z - z_0) + z_0$ soit $z' = e^{\frac{2\pi}{3}}z$.

b. Le point C est l'image de B par r donc $z_C = e^{\frac{2\pi}{3}}z_B = e^{\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)}$ soit $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c. $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ soit $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

$z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ soit $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

d. Voir la figure à la fin de l'exercice.

2. a. $D = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & -1 & 2 \end{array} \right)$ donc :

$$z_D = \frac{2z_A - z_B + 2z_C}{3} = \frac{1}{3} \left(2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right) \text{ soit } \boxed{z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}.$$

b. Remarquons déjà que $z_A = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_D = \overline{z_C} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc les affixes de A, B C et D sont tous les quatre de la forme $e^{i\theta}$ donc tous les quatre de module 1.

Ceci implique que A, B, C et D sont tous sur le cercle trigonométrique (de centre O et de rayon 1).

3. a. L'écriture complexe de h est donnée par $z' = 2(z - z_A) + z_A = 2(z - i) + i$ soit $z' = 2z - i$.

b. Le point E est l'image de D par h donc $z_E = 2z_D - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) - i = \sqrt{3} + i - i$ soit $z_E = \sqrt{3}$.

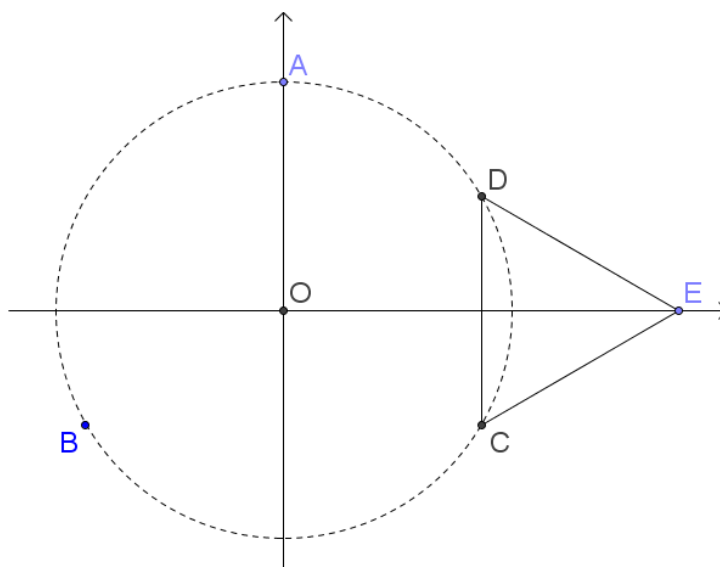
4. a. $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)}{\sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$ soit $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. Le résultat précédent équivaut aux deux résultats :

- $\left| \frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} \right| = \frac{|z_D - z_C|}{|z_E - z_C|} = \frac{CD}{CE} = 1$ soit $CD = CE$ **(1)** ;
- $\arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} \right) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ soit $(\overline{CE}, \overline{CD}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ **(2)**.

Ainsi, **(1)** implique que CDE est isocèle en C et **(2)** implique alors que CDE est équilatéral indirect.

Figure (non exactement à l'échelle) :



Exercice 3

1. Avant tout, pour que les logarithmes et la racine soient définis, il faut que :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \quad 2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 1,5 \\ \bullet \quad 6-x > 0 \Leftrightarrow x < 6 \\ \bullet \quad x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{1,5 < x < 6}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \ln \sqrt{2x-3} &= \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(2x-3) + \frac{1}{2} \ln x = \ln(6-x) \\ \Leftrightarrow \ln[(2x-3)x] &= 2 \ln(6-x) \Leftrightarrow \ln(2x^2-3x) = \ln[(6-x)^2] \\ \Leftrightarrow 2x^2-3x &= (6-x)^2 \Leftrightarrow x^2+9x-36=0 \end{aligned}$$

Dans le trinôme, $\Delta = 225 - 15^2 > 0$ donc il y a deux racines : $x_1 = \frac{-9-15}{2} = -12$ et $x_2 = \frac{-9+15}{2} = 3$.

Et $x_1 < 1,5$ donc ne convient pas alors que $1,5 < x_2 < 6$, donc convient et ainsi : $\boxed{S = \{3\}}$.

2. Pour que les logarithmes soient définis, il faut que :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \quad x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 2 \\ \text{(on trouve facilement que } -1 \text{ et } 2 \text{ sont les racines du trinôme} \\ \text{qui est positif à l'extérieur de ces racines)} \\ \bullet \quad 3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{x < -1 \text{ ou } 2 < x < 3}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - x - 2) &< 2 \ln(3-x) \Leftrightarrow \ln(x^2 - x - 2) < \ln[(3-x)^2] \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 &< (3-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < x^2 - 6x + 9 \\ \Leftrightarrow 5x &< 11 \Leftrightarrow x < 2,2. \end{aligned}$$

Avec les valeurs interdites, on trouve $\boxed{S =]-\infty; -1[\cup]2; 2,2[}$.

3. Pour que les logarithmes soient définis, il faut que $x^2 y^3 > 0$ et $\frac{x^3}{y^4} > 0$ ce qui revient à $\boxed{x > 0 \text{ et } y > 0}$.

Alors :

$$\begin{cases} \ln(x^2 y^3) = -4 \\ \ln\left(\frac{x^3}{y^4}\right) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \ln x + 3 \ln y = -4 & \text{(1)} \\ 3 \ln x - 4 \ln y = 11 & \text{(2)} \end{cases}$$

En faisant, $4 \times \text{(1)} + 3 \times \text{(2)}$, on obtient $17 \ln x = 17$ soit $\underline{\ln x = 1}$.

En remplaçant alors $\ln x$ par 1 dans l'équation (1), on obtient $2 + 3 \ln y = -4$ soit $\underline{\ln y = -2}$.

Ainsi, $(\ln x; \ln y) = (1; -2)$ et donc $(x; y) = (e; e^{-2})$ et finalement :

$$\boxed{S = \{(e; e^{-2})\}}$$

Exercice 4

Partie A

1. f est définie sur \mathbb{R} qui est symétrique par rapport à 0.

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \neq 0 :$$

$$f(-x) = (-x) \ln [(-x)^2] - 2(-x) = -x \ln x^2 + 2x = -(x \ln x^2 - 2x) = -f(x)$$

Donc f est impaire et (\mathcal{C}) est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

2. On a vu que $\forall x > 0$, $\ln x^2 = 2 \ln x$ donc pour $x > 0$, $f(x) = 2x \ln x - 2x$.

3. Remarquons qu'avec le résultat donné dans l'énoncé, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2x \ln x = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$ donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 2 \times 0 - 2 \times 0 = 0 = f(0).$$

Comme la fonction est impaire, on a aussi $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(-x) = -\lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} f(X) = 0 = f(0)$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ et $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

4. Pour $x \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x^2 - 2) = \lim_{X \rightarrow 0} (\ln X - 2) = -\infty \text{ (avec } X = x^2 \text{)}.$$

La limite n'est pas finie donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

Graphiquement, cela veut dire que (\mathcal{C}) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

5. D'après la question 2, pour tout $x > 0$, $f(x) = 2x \ln x - 2x = 2x(\ln x - 1)$.

Et donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1) = +\infty$ donc par produit, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.

6. Sur $I =]0 ; +\infty[$, $f(x) = 2x(\ln x - 1)$.

Alors, f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Et on a :

$$f'(x) = 2(\ln x - 1) + 2x \frac{1}{x} = 2 \ln x.$$

7. La dérivée de f est du signe de $\ln x$ donc :

- $f'(0) = 0$;
- sur $]0 ; 1[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante ;
- sur $]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

8. On obtient ainsi le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	0	\searrow	\nearrow $+\infty$
		-2	

9. Si la courbe (\mathcal{C}) coupe l'axe des abscisses, c'est en un point d'ordonnée nulle donc tel que $f(x) = 0$.

- Pour $x = 0$, on a déjà $f(0) = 0$ donc la courbe (\mathcal{C}) passe par O, l'origine du repère.
- Pour $x > 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ donc la courbe (\mathcal{C}) coupe (Ox) au point A(e ; 0).
- Comme (\mathcal{C}) est symétrique par rapport à O, elle va aussi couper (Ox) en A'(-e ; 0), symétrique de A par rapport à O.

Finalement, $\boxed{(\mathcal{C}) \text{ coupe (Ox) en trois points : O, A(e ; 0) et A'(-e ; 0) .}$

(\mathcal{C}) coupe la droite Δ au(x) point(s) d'abscisse x telle que $f(x) = x$.

Remarquons que le point O satisfait cette condition et si $x \neq 0$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \ln x^2 - 2x = x \Leftrightarrow \ln x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = e^3 \Leftrightarrow x = e^{3/2} \text{ ou } x = -e^{3/2}.$$

Finalement, $\boxed{(\mathcal{C}) \text{ coupe } \Delta \text{ en trois points : O, B}(e^{3/2} ; e^{3/2}) \text{ et B}'(-e^{3/2} ; -e^{3/2}) .}$

Partie B

1. Pour $x > 0$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{F(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 \ln x - (3/2)x^2}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x \ln x - \frac{3}{2}x \right) = 0 - 0 = 0.$$

La limite est finie donc $\boxed{F \text{ est dérivable en 0 et } F'(0) = 0 .}$

Remarquons que $F'(0) = f(0)$.

2. La fonction F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ en tant que différence de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Sur $]0 ; +\infty[$, on peut écrire $F(x) = x^2 \left(\ln x - \frac{3}{2} \right)$ et :

$$F'(x) = 2x \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x - 3x + x = 2x \ln x - 2x = f(x).$$

3. Les deux questions précédentes permettent de conclure que F est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

Alors la primitive G recherchée est telle que $G = F + k$ avec k constante réelle.

On veut que G s'annule en \sqrt{e} , soit $G(\sqrt{e}) = 0$ donc :

$$k = -F(\sqrt{e}) = -(\sqrt{e})^2 \left(\ln \sqrt{e} - \frac{3}{2} \right) = -e \left(\frac{1}{2} \ln e - \frac{3}{2} \right) = -e \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = e.$$

Ainsi, $\boxed{G = F + e .}$