Devoir maison N°1 – Sujet 2

Note : pour certaines questions, on utilisera un outil électronique. A chaque fois, on précisera l'outil utilisé (calculatrice, tableur, …).

Le nombre d'or

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   La solution positive est notée Φ et appelée « nombre d'or ».
2. Démontrer les trois égalités suivantes :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}, \ \Phi = \sqrt{1+\Phi} \ \text{ et } \ \Phi = \frac{\Phi^2 + 1}{2\Phi - 1}$$

Chacune de ces égalités conduit à considérer une suite dont on va établir la convergence vers Φ. Dans la suite du problème on pourra tirer parti des trois égalités ci-dessus.

Une première suite

On considère la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{3}{2} \leq a_n \leq 2$.
2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|a_{n+1} - \Phi\right| \leq \dfrac{4}{9}\left|a_n - \Phi\right|$
3. Démontrer alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|a_n - \Phi\right| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1} \left|a_1 - \Phi\right|$ puis en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|a_n - \Phi\right| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

4. Démontrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.
5. En utilisant la question 3, déterminer, à l'aide d'un outil électronique, un entier N_a tel que :

$$n \geq N_a \Rightarrow \left|a_n - \Phi\right| \leq 10^{-10}$$

Une deuxième suite

On considère la suite (b_n) définie par :

$$\begin{cases} b_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, b_{n+1} = \sqrt{b_n + 1} \end{cases}$$

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\, \Phi \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 2$ puis en déduire que (b_n) converge.
2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, 0 \leq (b_{n+1} - \Phi) \leq \frac{1}{3}(b_n - \Phi)$.
3. Montrer alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, 0 \leq (b_n - \Phi) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. En déduire la limite de (b_n).
4. En utilisant la question 3, déterminer, à l'aide d'un outil électronique, un entier N_b tel que :
$$n \geq N_b \Rightarrow |b_n - \Phi| \leq 10^{-10}$$

Une troisième suite

On considère la suite (c_n) définie par :

$$\begin{cases} c_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, c_{n+1} = \dfrac{c_n^2 + 1}{2c_n - 1} \end{cases}$$

Sur $\mathrm{I} = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, on définit la fonction *f* par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$.

1. Vérifier que $f(\Phi) = \Phi$, que $f'(\Phi) = 0$ et que la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[\Phi\,;+\infty[$.
2. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\, \Phi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$ puis en déduire que (c_n) converge.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\, c_{n+1} - \Phi \leq \frac{1}{2}(c_n - \Phi)^2$
4. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leq c_n - \Phi \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^n}$.
5. Déterminer la limite de (c_n).
6. En utilisant la question 4, déterminer, à l'aide d'un outil électronique, un entier N_c tel que :
$$n \geq N_c \Rightarrow |c_n - \Phi| \leq 10^{-10}$$