

Devoir maison N°1

I. Etude générale de la convergence des suites arithmético-géométriques

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

où a est différent de 0 (sans quoi la suite est constante) et de 1 (sans quoi la suite est arithmétique) et b est différent de 0 (sans quoi la suite est géométrique) pour ne pas étudier des situations classiques.

1. On suppose que la suite (u_n) converge. Exprimer sa limite en fonction de a et b .

On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique (on précisera son premier terme et sa raison).

3. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .

4. Pour quelles valeurs de a la suite (u_n) converge-t-elle ?

II. Application : calcul de la mensualité d'un prêt

On cherche à calculer la mensualité (supposée constante ici) M d'un prêt d'un montant de 200 000 euros contracté le 1^{er} mars 2015 pour une durée de 15 ans (180 mois) au taux mensuel (également supposé constant) de 0,2%.

Au 1^{er} avril 2015, on doit 200 000 euros augmentés des intérêts : $200\,000 \times \frac{0,2}{100} = 400$ € soit au total 200 400 €. Ce même jour, on rembourse alors la mensualité M et le capital restant dû s'élève finalement à $200\,400 - M$ euros.

On note K_n le capital restant dû, en euros, après n mois. On a donc $K_0 = 200\,000$.

1. Expliquer pourquoi la suite (K_n) vérifie la relation de récurrence : $K_{n+1} = 1,002 K_n - M$.

2. A l'aide de la première partie, exprimer K_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

3. Au bout de 180 mois, le capital est remboursé. On a donc $K_{180} = 0$. Calculer alors M .

4. Généralisation : exprimer la mensualité M en fonction du capital initial K_0 , du taux d'intérêt mensuel i et du nombre de mensualités N .