Devoir maison N°3 - Sujet

Exercice 1 – L'inégalité de Jacques Bernoulli (1654-1705)

Dans cet exercice, on se propose de démontrer que l'on a pour tout *x* réel positif et tout entier naturel *n* :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

1. Traiter les cas $n=0$ et $n=1$;

A partir de maintenant, on suppose que l'on a : $n \geq 2$.

2. Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = (1+x)^n$$

   On note $\mathscr{C}_{f_n}$ sa courbe représentative dans un repère.
   a. Justifier soigneusement que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$;
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}_n$ à $\mathscr{C}_{f_n}$ au point d'abscisse $x=0$;

3. On définit la fonction φ_n sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\varphi_n(x) = (1+x)^n - (1+nx)$$

   a. Montrer que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi_n(x) \geq 0$;
   b. Conclure.

Exercice 2

Traiter l'exercice 120 page 87.

Note : l'exercice peut être traité essentiellement sur la base de considérations géométriques, certaines étant, bien sûr, liées à la notion de dérivabilité (le défi appartient à ce chapitre-là !). On peut également (en anticipant quelque peu !) adopter une approche plus analytique en s'aidant de la notion de distance d'un point à une droite (on se reportera alors à la page 300 du livre et on s'aidera de la formule donnée au point ❷). **<u>Dans tous les cas, on accordera une grande importance à la qualité de la rédaction !</u>**