# Devoir maison N°5 - Sujet

# *Autour du théorème de Von Aubel*

Un certain nombre de figures sont demandées dans ce devoir maison. Elles doivent obligatoirement être réalisées à l'aide du logiciel Geogebra. Vous retiendrez les options suivantes :

- Taille des caractères : **16** ;
- Mesure des angles : **degré** ;
- Nombre de décimales : **3**.

Sauf indication particulière, on notera avec la minuscule correspondante l'affixe d'un point donné du plan complexe.

## Préambule

On considère A et B deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives *a* et *b*.
Soit C et D deux points d'affixes respectives *c* et *d* tels que ACBD soit un carré direct.

a) Exprimer *c* et *d* en fonction de *a* et *b* ;

b) On note $(x_A, y_A)$, $(x_B, y_B)$, $(x_C, y_C)$ et $(x_D, y_D)$ respectivement les coordonnées de A, B, C et D.
Exprimer $x_C$, $y_C$, $x_D$ et $y_D$ en fonction de $x_A$, $y_A$, $x_B$ et $y_B$.

(Remarque : avec Geogebra, il vous est possible de redéfinir un point à l'aide de telles relations ! Vous avez, par exemple, construit deux points A et B dans votre feuille de travail et vous souhaitez construire le point M milieu du segment [AB]. Un menu vous permet de le faire directement, certes. Mais vous pouvez aussi placer le point M n'importe où puis le redéfinir. Pour ce faire, vous remplacer son abscisse et son ordonnée par, respectivement, les formules suivantes : 0.5*(x(A)+x(B)) et 0.5*(y(A)+y(B)) …)

c) Fournir une figure codée faisant apparaître le carré ACBD et le codage de ses quatre angles droits.

## Une configuration simple

On considère maintenant un triangle ABC direct.
Soit alors les points N, P, M, Q tels que CNAP et AMBQ soient des carrés directs.
Soit K le milieu du segment [BC].

a) En considérant le complexe $\dfrac{m-k}{n-k}$, démontrer que l'on a $\mathrm{KN} = \mathrm{KM}$ et que les droites $(\mathrm{KN})$ et $(\mathrm{KM})$ sont perpendiculaires.

b) Fournir une figure codée faisant apparaître le triangle ABC, les points N, P, M et Q, les longueurs KM et KN ainsi que le codage de l'angle $\left(\overrightarrow{KN},\overrightarrow{KM}\right)$.

## Le théorème de Von Aubel

On considère quatre points du plan A, B, C et D, distincts deux à deux.

On introduit alors les points P et $P'$ tels que :

- $APBP'$ soit un carré ;
- $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

On introduit de façon analogue les points Q et $Q'$ (à partir de B et C), les points R et $R'$ (à partir de C et D) et les points S et $S'$ (à partir de D et A).

(Remarque : dans la configuration « historique », le quadrilatère ABCD est convexe et les points P, Q, R et S sont extérieurs à ce quadrilatère … mais le résultat ci-dessous reste valable quelle que soit la nature du quadrilatère ABCD (convexe ou non, croisé ou non … vous vous en persuaderez d'ailleurs en déplaçant sous Geogebra les sommets A, B, C et D (cf. la figure fournie sur le site le 3 février dernier). Une seule chose importe : le fait que les points P, Q, R et S ($P', Q', R'$ et $S'$ respectivement) soient situés du même côté de la ligne polygonale ABCD …)

a) Démontrer que $PR=QS$ et que les droites $(PR)$ et $(QS)$ sont perpendiculaires.

b) Fournir une figure codée faisant apparaître les longueurs de PR et QS, le codage de l'angle $\left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{QS}\right)$ et celui des angles en P, Q, R et S (angles droits …).

## Autour du théorème …

a) Montrer que PQRS est un parallélogramme si, et seulement si, ABCD en est un ;

Fournir une figure correspondant à cette situation (on commencera par construire un parallélogramme ABCD et mettra en évidence les parallélogrammes ABCD et PQRS).

b) A partir de la configuration précédente, on introduit les points K, L, U et V milieux respectifs des segments [AC], [BD], [PR] et [QS].

On suppose que ABCD n'est pas un parallélogramme.
Montrer que ULVK est un carré.

Fournir une figure correspondant à cette situation (on mettra en évidence le carré ULVK).