

Durée 4 heures.
La calculatrice graphique est autorisée.
Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 – VRAI/FAUX (commun)**[4 points]**

Répondre sur votre copie par VRAI ou FAUX sans justifier.
Les mauvaises réponses seront pénalisées.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0$.

2. Si f est une fonction strictement positive telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[5]{f(x)}}{\sqrt[4]{f(x)}} = +\infty$$

3. Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . La fonction g définie par $g(x) = f(x)2^{f(x)}$ est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée a le même signe que celle de f .

4. Soit f une fonction continue sur $[0 ; 1]$ et F la primitive de f qui s'annule en 0 sur cet intervalle. On a :

$$\int_0^1 (1-t)f(t) dt = \int_0^1 F(t) dt$$

Exercice 2 (commun)**[6 points]**

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x \ln x$$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

On appelle \mathcal{A} l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire \mathcal{A} . On note M et N les points de \mathcal{C} d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée en annexe.

1. a. Montrer que f est positive sur $[1; 2]$.
- b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (MN).
- c. Démontrer que sur l'intervalle $[1; 2]$, la courbe \mathcal{C} admet une unique tangente parallèle à (MN). On appelle T cette tangente et E le point de tangence à \mathcal{C} .
- d. Montrer qu'une équation de T est :

$$y = (2 \ln 2)x - \frac{4}{e} + 1.$$

2. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - \left[(2 \ln 2)x - \frac{4}{e} + 1 \right]$.

Etudier les variations de g sur $]0; +\infty[$ et en déduire la position relative de \mathcal{C} et T.

3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T. Justifier que le segment [M'N'] est situé entre l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} .
4. Calculer les aires des trapèzes MNQP et M'N'QP en cm².
5. On admet que le segment [MN] est au dessus de \mathcal{C} . Déduire de ce qui précède un encadrement de \mathcal{A} .

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de l'aire \mathcal{A} .

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x \ln x \, dx$.
2. En déduire la valeur exacte de \mathcal{A} en cm².

Exercice 3 – (commun)**[5 points]**

On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = a \text{ et, pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. on suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$;
 - a. Calculer u_1 et u_2 .
 - b. Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle $[0;2]$, la droite (d) d'équation $y = x$ et la courbe (Γ) représentative de la fonction : $f : x \mapsto x(2 - x)$.
 - c. utiliser (d) et (Γ) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1 , A_2 et A_3 d'abscisses respectives u_1 , u_2 et u_3 .
2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0;1[$.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.
 - b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 - c. Que peut-on en déduire ?
3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$v_n = 1 - u_n$$

- a. Exprimer, pour tout n , v_{n+1} en fonction de v_n .
- b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite de la suite (v_n) , puis celle de la suite (u_n) .

Exercice 4 (NON spécialité mathématiques uniquement)**[5 points]**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1. Placer ces points sur un dessin.
2. a. Vérifier que : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 b. En déduire la nature du triangle ABC
 c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC. Tracer le cercle Γ_1 .
3. a. Etablir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2 . Préciser son rayon. Construire Γ_2 .
 b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2 .
4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 a. Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.
 b. Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1 .
5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z , on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M' .
 On posera : $z' = az + b$ avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
 On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1 .
 a. Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b .
 b. Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(C)$, image du point C par la rotation r ; en déduire que le point $r(C)$ appartient à un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1 .

Exercice 4 (spécialité mathématiques uniquement)**[5 points]**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

On fera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

Soient A, B et C les points d'affixe respectives $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
2.
 - a. Déterminer l'affixe du point B' image du point B par f .
 - b. Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.
3. Soit M le point d'affixe $x + iy$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
Soit M' l'image de M par f .
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et \overrightarrow{CA} sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Vérifier que le couple $(-4; 2)$ est une solution de (E).
 - b. Résoudre l'équation (E).
 - c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et \overrightarrow{CA} soient orthogonaux.
Placer ces points sur la figure.

FIN DU SUJET

ANNEXE

La figure ci-dessous est la figure associée à l'exercice 2.

