Exercice 1

1) D'après le cours sur les racines nièmes, on a le tableau :

x	0	$+\infty$
f	0 ↗	$+\infty$

2) Sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$f(x) = x \iff \sqrt[3]{x} = x \iff x = x^3 \iff x^3 - x = 0 \iff x(x-1)(x+1) = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les solutions positives de } f(x) = x \text{ sont 0 et 1}}.$$

3) Sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$f(x) > x \iff \sqrt[3]{x} > x \iff x > x^3 \iff x^3 - x < 0 \iff x(x-1)(x+1) < 0.$$

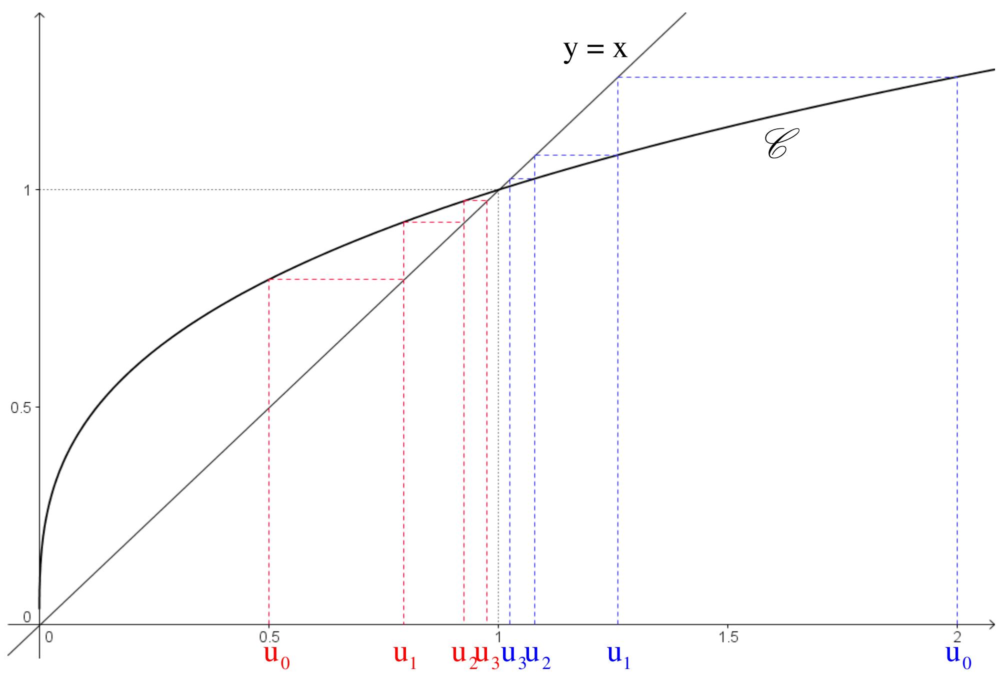
Or, sur $\mathbb{R}_+$, $x+1>0$ donc $f(x) > x \iff x(x-1) < 0$.

Or, $x(x-1) = x^2 - x$ est un trinôme en x dont le coefficient de x² est positif donc il est strictement négatif si et seulement x est strictement entre ses racines (qui sont 0 et 1).

Ainsi :

$$\boxed{f(x) > x \text{ si et seulement si } 0 < x < 1}.$$

4) On obtient le graphique :



5) $u_0 = 0,5$.

a. Procédons par récurrence.

Initialisation : Par hypothèse, on a $u_0 = 0,5 < 1$ donc l'inégalité est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que $u_n < 1$. On a de plus, $u_n > 0$.
Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(u_n) < f(1)$.
Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$ donc $u_{n+1} < 1$.
Ainsi, l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

b. D'après ce qui précède, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Alors, d'après la question 3, $f(u_n) > u_n$, soit $u_{n+1} > u_n$ et ainsi :

$\boxed{\text{La suite u est strictement croissante}}$.

c. D'après les deux questions précédentes, la suite u est croissante et majorée par 1 donc elle converge.

Appelons L la limite de u. Comme u est croissante, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$, donc :

$$L \geq u_0 > 0.$$

Or, la fonction f (racine cubique) est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $f(L) = L$.
Alors, d'après la question 2, $L = 0$ ou $L = 1$. Mais $L \geq u_0 > 0$ donc L ne peut être nulle et ainsi :

$\boxed{\text{La suite u converge vers 1}}$.

6) $u_0 = 2$.

a. Prouvons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $1 < u_{n+1} < u_n$.

Initialisation : On a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(u_0) = f(2) = \sqrt[3]{2} \approx 1,3$.
Donc, on a bien $1 < u_1 < u_0$ et la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour n donné, $1 < u_{n+1} < u_n$.
Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$, soit :

$$1 < u_{n+2} < u_{n+1}.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

b. Ce qui précède prouve que u est décroissante minorée par 1, donc elle converge vers une limite $L' \geq 1$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $f(L') = L'$, ce qui implique que $L' = 0$ ou $L' = 1$. Mais $L' \geq 1$ donc $L' \neq 0$ et ainsi :

$\boxed{\text{La suite u converge vers 1}}$.

7) On a admis que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc la suite v est bien définie.

a. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt[3]{u_n}) = \ln(u_n{}^{1/3}) = \dfrac{1}{3}\ln(u_n) = \dfrac{1}{3}v_n$ donc v est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. On alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\ln(u_0)}{3^n} = \frac{\ln 2}{3^n}.$$

Or, $v_n = \ln(u_n)$, soit $u_n = e^{v_n}$ et ainsi :

$$\boxed{u_n = e^{\frac{\ln 2}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3^n}}}.$$

c. Comme $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln 2}{3^n} = 0$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ donc par composition :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}.$$

d. On a vu que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{\frac{1}{3^n}}$ donc :

$$u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = u_n = 2^{\frac{1}{3^0}} \times 2^{\frac{1}{3^1}} \times 2^{\frac{1}{3^2}} \times \ldots \times 2^{\frac{1}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}.$$

Or, $\dfrac{1}{3^0} + \dfrac{1}{3^1} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{3^n}$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ donc :

$$\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$$

Et :

$$u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = 2^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}} = (2^3 2^{-\frac{1}{3^n}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8}{2^{1/3^n}}}.$$

Soit :

$$\boxed{u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = \sqrt{\frac{8}{u_n}}}.$$

Exercice 2

I. Restitution organisée des connaissances

1. D'après le pré-requis, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$, donc en passant à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

Posons $\mathrm{X}=\ln x$. On a alors $x=e^{\mathrm{X}}$ et quand $x\to+\infty$, $\mathrm{X}\to+\infty$ donc par composition :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{\mathrm{X}\to+\infty}\frac{\mathrm{X}}{e^{\mathrm{X}}}=0.$$

2. Remarquons que si $n=1$, le résultat voulu est celui de la question précédente.

Si $n\geq 2$, on peut écrire $\forall\, x>0$, on a $\dfrac{\ln x}{x^n}=\dfrac{1}{x^{n-1}}\dfrac{\ln x}{x}$ avec $n-1\geq 1$. Donc :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{n-1}}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\end{array}\right\}\overset{\text{par produit}}{\Rightarrow}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0.$$

II. Etude d'une fonction *f*

1. Etude de *u*.

   a. La fonction u est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et :

   $$u'(x)=3x^2+\frac{2}{x}.$$

   Sur $]0;+\infty[$, on a $x>0$ donc $3x^2>0$ et $\dfrac{2}{x}>0$. Ainsi, $u'(x)>0$ et donc :

   $$\boxed{u\text{ est strictement croissante que }]0;+\infty[}.$$

   b. On $u(1)=1^3-1+2\ln 1=0$.

   Alors, d'après la question précédente :

   - si $x>1$, alors $u(x)>u(1)$, soit $u(x)>0$;
   - si $0<x<1$, alors $u(x)<u(1)$, soit $u(x)<0$.

   Ainsi :

   $$\boxed{u(x)<0\text{ sur }]0;1[,\ u(1)=0\text{ et }u(x)>0\text{ sur }]1;+\infty[}.$$

2. Etude de *f*.

a. En 0, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par produit}}{\Rightarrow}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^2}=-\infty\\ \\ \lim\limits_{x\to 0}x=0\end{array}\right\}\overset{\text{par différence}}{\Rightarrow}\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty}$$

En $+\infty$, le résultat de la partie I (avec $n=2$) permet d'écrire :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0\end{array}\right\}\overset{\text{par différence}}{\Rightarrow}\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty}$$

b. La fonction *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que différence de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et :

$$f'(x)=1-\frac{(1/x)x^2-2x\ln x}{x^4}=1-\frac{x-2x\ln x}{x^4}=1-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{u(x)}{x^3}.$$

Sur $]0;+\infty[$, $x^3>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$.

A l'aide de la question 1b., on établit alors le tableau de variations de *f* :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

II. Calcul d'aire

1. La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et :

$$g'(x)=\frac{(1/x)x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

2. On a vu que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc elle y est continue et ainsi, elle admet des primitives sur cet intervalle. De plus, on peut remarquer que :

$$g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{1}{x^2}-x+x-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{1}{x^2}-x+f(x)$$

Donc :

$$f(x)=g'(x)-\frac{1}{x^2}+x.$$

Or, une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$ et une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ donc une primitive F de *f* sur $]0;+\infty[$ est $F: x \mapsto g(x)+\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}$ soit :

$$\boxed{F(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}}.$$

3. Le tableau de variations de f obtenu dans la question II.2 montre que 1 est le minimum de la fonction sur $]0;+\infty[$, ce qui prouve que la fonction est strictement positive sur cet intervalle.

Alors, l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ est donnée par :

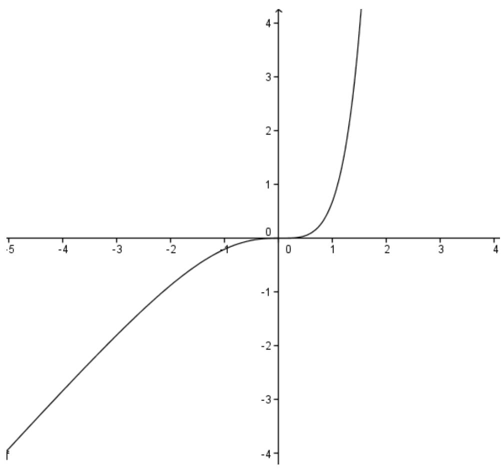
$$\mathscr{A}=\int_1^e f(t)\,dt=\left[F(t)\right]_1^e=F(e)-F(1)=\left(\frac{\ln e}{e}+\frac{1}{e}+\frac{e^2}{2}\right)-\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1^2}{2}\right)=\frac{2}{e}+\frac{e^2}{2}-\frac{3}{2}.$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{A}=\frac{2}{e}+\frac{e^2-3}{2}\ (u.a.)}$$

Exercice 3

1) On obtient le graphique :



2) a) Il semble que f soit croissante.

b) Il semble que $f(x)=0$ admet une solution unique : 0.

3) a) L'inéquation équivaut à :

$$\begin{cases} 1) X = e^x \\ 2) X^2 - 2.1X + 1.1 \geq 0 \end{cases}$$

Alors, l'inéquation 2) a pour solutions $X \leq 1\ ou\ X \geq 1.1$, d'où l'ensemble solution :

$$S =]-\infty, 0] \cup [ln 1.1; +\infty[.$$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = e^{2x} - 2.1e^{x} + 1.1.$$

Donc, d'après a) :

- f est strictement croissante sur$]-\infty, 0]$ et sur $[ln1.1; +\infty[$;
- f est strictement décroissante sur $[0; ln1.1]$.

c) Sur $]-\infty,0]$, f est strictement croissante et $a\ pour\ maximum\ 0\ atteint\ en\ 0$.

Sur $[0; ln1.1]$, f est strictement décroissante et $a\ pour\ maximum\ 0\ atteint\ en\ 0$.

Sur $[ln1.1; +\infty[$, f est dérivable (donc continue) et strictement croissante avec :

$$f(ln1.1) = -0.105 + 1.1ln1.1 \approx -0.000159$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x}(0.5e^{x} - 2.1 + 1.1xe^{-x} + 1.6e^{-x}) = +\infty$$

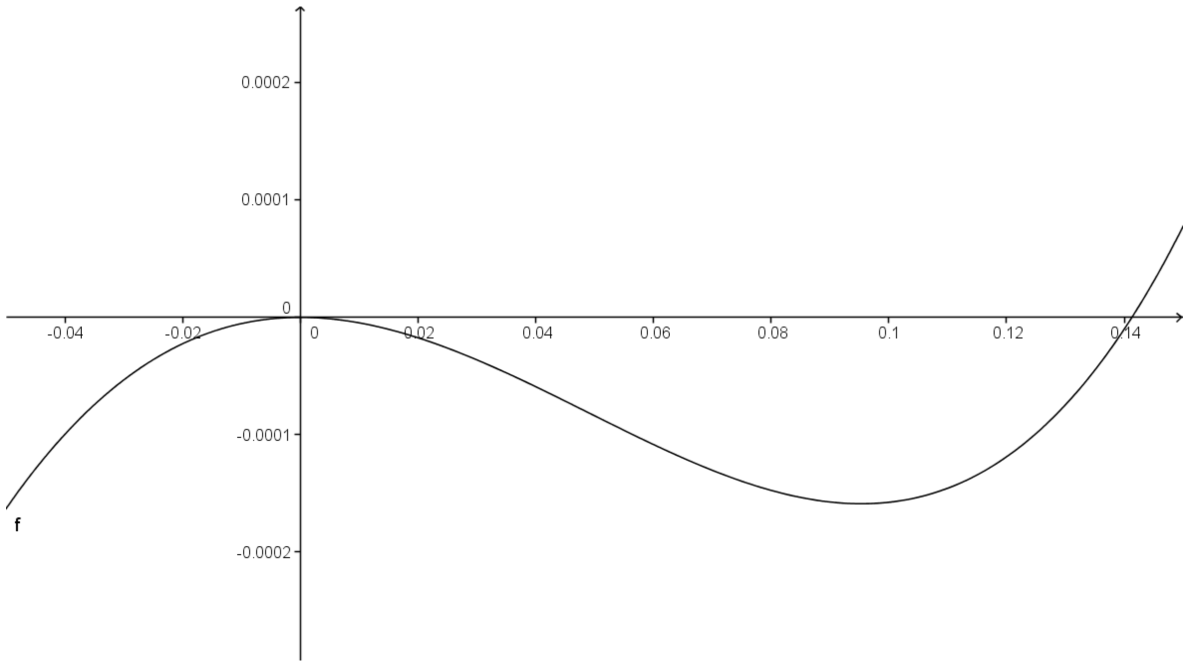
d'après le cours sur les exponentielles et les croissances comparées.

Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[ln1.1; +\infty[$ appelée $\propto$

Finalement, , l'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions : 0 et $\propto$.

4) La calculatrice donne $\propto \approx 0.141$, qui est bien dans l'intervalle $[-0.05; 0.15]$ et 0 est aussi dans cet intervalle.

Le minimum local atteint par f vaut environ -1.59×10^{-4}, on peut choisir pour valeurs extrêmes de y, par exemple $-2 \times 10^{-4}\ et\ 2 \times 10^{-4}$ (d'autres choix sont possibles, mais il faut que la courbe reste lisible)



Exercice 4 (NON spécialité mathématiques)

1. Un exemple

a. Voir la figure.

b. On a :

$$z_{\mathrm{K'}} = \frac{-z_{\mathrm{K}}^{2}}{z_{\mathrm{K}} - i} = \frac{-(1+i)^2}{(1+i)-i} = \frac{-(1+2i+i^2)}{1} = -(1+2i-1) \quad \text{soit} \quad \boxed{z_{\mathrm{K'}} = -2i}.$$

c. Voir la figure.

2. Des points pour lesquels le problème ne se pose pas

a. On a :

$$z_{\mathrm{L'}} = \frac{-z_{\mathrm{L}}^{2}}{z_{\mathrm{L}} - i} = \frac{-\left(\frac{i}{2}\right)^2}{\frac{i}{2} - i} = \frac{-\left(\frac{i}{2}\right)^2}{-\frac{i}{2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{z_{\mathrm{L'}} = \frac{i}{2}}.$$

On remarque que $z_{\mathrm{L'}} = z_{\mathrm{L}}$ donc $\mathrm{L'} = \mathrm{L}$. Le point L est invariant par *f*.

b. Soit M d'affixe $z \neq i$, invariant par *f*. On a alors $z' = z$ soit :

$$\frac{-z^2}{z-i} = z \iff \begin{cases} -z^2 = z(z-i) \\ z \neq i \end{cases} \iff \begin{cases} 2z^2 - iz = 0 \\ z \neq i \end{cases} \iff \begin{cases} (2z-i)z = 0 \\ z \neq i \end{cases} \iff z = 0 \text{ ou } z = \frac{i}{2}.$$

Ainsi, *f* possède deux points invariants :

$$\boxed{\text{les points O d'affixe 0 et L d'affixe } \frac{i}{2}}.$$

3. Un procédé de construction

a. Si G, d'affixe *g*, est l'isobarycentre des points A, M et $\mathrm{M'}$, on a :

$$g = \frac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{M}} + z_{\mathrm{M'}}}{3} = \frac{i + z + z'}{3} = \frac{1}{3}\left(i + z - \frac{z^2}{z-i}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{(z+i)(z-i) - z^2}{z-i} = \frac{z^2 - i^2 - z^2}{3(z-i)}.$$

Soit :

$$\boxed{g = \frac{1}{3(z-i)}}.$$

b. M est un point du cercle de centre A de rayon *r* si et seulement si $\mathrm{AM} = r$, soit :

$$|z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{A}}| = |z - i| = r.$$

On a alors :

$$|g| = \left|\frac{1}{3(z-i)}\right| = \frac{1}{3|z-i|} = \frac{1}{3r}.$$

Ce qui équivaut à $\mathrm{OM} = \dfrac{1}{3r}$ et donc :

$$\boxed{\text{G est bien un point du cercle de centre O de rayon } \dfrac{1}{3r}}.$$

c. On a :

$$\arg g = \arg\left[\frac{1}{3(z-i)}\right] = -\arg\left[3(z-i)\right] = -\arg(z-i) = -\arg(z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{A}}).$$

Or, $\arg(z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{A}}) = \left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)$ donc :

$$\boxed{\arg g = -\left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)}.$$

d. Appelons G, l'isobarycentre des points A, D et D', c'est-à-dire le centre de gravité du triangle ADD'.

Comme G est aux deux tiers des médianes, si J est le milieu de [AD], on a $\overrightarrow{\mathrm{JD}'} = 3\overrightarrow{\mathrm{JG}}$.
Ainsi, pour construire D', il suffit de construire G (D' sera l'image de G par l'homothétie de centre J et de rapport 3).

Le point D est sur le cercle de centre A et de rayon $r = \dfrac{1}{2}$, donc d'après la question b., le point G est sur le cercle Γ de centre O et de rayon $\dfrac{1}{3r} = \dfrac{2}{3}$.

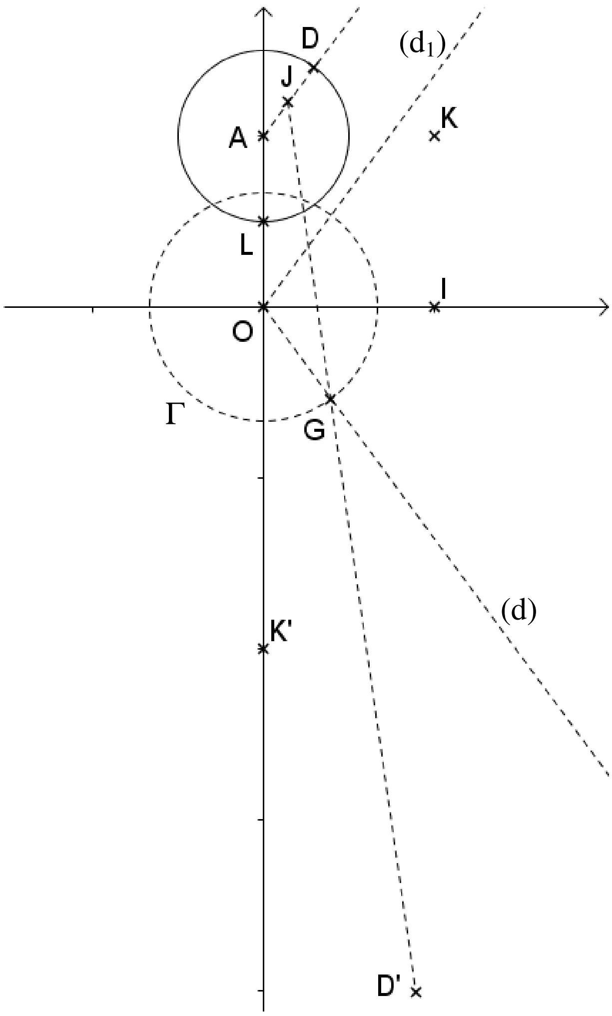
Posons $\left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \alpha$. D'après c., $\left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right) = \arg g = -\alpha$. Ceci veut dire que G est sur la demi-droite (d) d'origine O faisant un angle de mesure algébrique $-\alpha$ avec le demi-axe [Ox).

Ainsi, G est à l'intersection de Γ et (d) et $\overrightarrow{\mathrm{JD}'} = 3\overrightarrow{\mathrm{JG}}$.

Pour construire le point D', réalisons la suite d'étapes suivantes :

- on trace le cercle G de centre O et de rayon $\dfrac{2}{3}$;
- on trace la demi-droite [AD) ;
- on construit la demi-droite (d_1) d'origine O faisant un angle de mesure algébrique α avec le demi-axe [Ox) (qui est parallèle à [AD)) ;
- on construit la demi-droite (d) d'origine O, symétrique de (d_1) par rapport (Ox) (elle fait alors une angle de mesure algébrique $-\alpha$ avec [Ox)) ;
- on place G à l'intersection de G et (d) ;
- enfin, on construit D', image de G par l'homothétie de centre J et de rapport 3.

On obtient la figure donnée page suivante.



Exercice 4 (spécialité mathématiques)

Partie A

1) Soit S la similitude directe recherchée, soit $M(z)\, et\, M'(Z')avec\, M' = S(M)$montrons qu'il existe $(a;b)unique\ avec\ a\epsilon\mathbb{C}^*\ et\ b\epsilon\mathbb{C}$ tel que : $Z' = aZ + b$, on sait que $S(A) = O\ et\ S(O) = B$,on résoud le système et on trouve $a = 2i\ et\ b = 6$, S existe et est unique, son écriture complexe est : $Z' = 2iZ + 6$

S a pour rapport$|2i| = 2$,pour angle $arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ et pour centre $\Omega(\omega)$ avec $\omega = \frac{6}{1-2i} = \frac{6+12i}{5}$

2) De même on cherche $a'et\ b'tq:\ Z' = a'\bar{Z} + b'$ on trouve $a' = -2i\ et\ b' = 6$

Partie B

1)
$M(Z)invariant\ par\ f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow Z = Z' \Leftrightarrow Z = -2i\bar{Z} + 6 \Leftrightarrow x + iy = -2i(x - iy) + 6$

Soit :

$$Z = Z' \Leftrightarrow x = -2y + 6\ et\ y = -2x \Leftrightarrow x = -2\ et\ y = 4 \Leftrightarrow Z = -2 + 4i.$$

Le seul point invariant est $K(-2 + 4i)$.

2) a) g est la composée d'une homothétie h de rapport $\frac{1}{2}$ et d'une similitude de rapport $|-2i| = 2$, g est donc de rapport $2 \times \frac{1}{2} = 1$ c'est donc une isométrie telle que :

$$g(K) = f \circ h(K) = f\big(h(K)\big) = f(K) = K.$$

b) L'écriture complexe de h est :

$$Z' - (-2+4i) = \frac{1}{2}\big(Z - (-2+4i)\big) \Leftrightarrow Z' = \frac{1}{2}Z - 1 + 2i.$$

On a donc :

$$Z'' = -2i\overline{Z'} + 6 = -2i\overline{1/2\, Z - 1 + 2i} + 6 = -i\bar{Z} + 2i - 4 + 6 = -i\bar{Z} + 2i + 2.$$

c) Cherchons les points invariants de l'axe $(O; \vec{v})$, ce sont les points d'affixe $iy, y \in \mathbb{R}$ tq :

$$iy = -i\overline{iy} + 2i + 2 \Leftrightarrow iy = -y + 2i + 2 \Leftrightarrow y = 2.$$

Donc, le seul le point invariant de l'axe $(O; \vec{v})$ est $L(2i)$.

g est donc une similitude qui laisse deux points invariants $K \text{ et } L$, de plus cette similitude est indirecte , c'est donc la réflexion d'axe (KL).

d) $g = f \circ h \Leftrightarrow g \circ h' = f \circ h \circ h' = f, \textit{avec } h' \textit{ réciproque de } h$ c'est-à-dire h' homothétie de centre K et de rapport 2 ; $f = g \circ h'$.

3) L'image d'une droite quelconque par l'homothétie h' est une droite qui lui est parallèle d'où :

$$\Delta \text{ et } f(\Delta) \text{ parallèles}$$

$$\text{équivaut à : } \Delta \text{ et } g(\Delta) \text{ sont parallèles ou confondues}$$
$$\Leftrightarrow \Delta \text{ parallèle à } (KL) \text{ ou } \Delta \text{ perpendiculaire à } (KL)$$