Durée 4 heures.
La calculatrice graphique est autorisée.
Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 (commun) [5 points]

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt[3]{x}$. On appelle $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Dresser le tableau de variation complet de f sans justifier.
2) Résoudre $f(x) = x$.
3) Démontrer que $f(x) > x$ si et seulement si $0 < x < 1$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ fixé et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et donc que la suite u est bien définie.

4) La courbe $\mathscr{C}$ est donnée en annexe. Construire sur l'axe des abscisses du repère les 4 premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $u_0 = 0,5$ et pour $u_0 = 2$ (on utilisera deux couleurs et on laissera les traits de construction apparents).
5) On suppose que $u_0 = 0,5$.
   a. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 1$.
   b. A l'aide de la question 3, déterminer le sens de variation de u.
   c. Justifier que u converge et déterminer sa limite.
6) On suppose que $u_0 = 2$.
   a. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 < u_{n+1} < u_n$.
   b. Justifier alors que u converge et déterminer sa limite.
7) Dans toute cette question, on suppose $u_0 > 0$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n)$.
   a. Prouver que la suite v est géométrique. Donner sa raison.
   b. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
   c. Retrouver alors les résultats des questions 5c et 6b.
   d. Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, exprimer $u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$ en fonction de n.

Exercice 2 (commun) [6 points]

I. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
2. En déduire que pour tout entier naturel *n* non nul : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

II. Etude d'une fonction *f*

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Soit *u* la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
   a. Etudier le sens de variation de la fonction *u* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Etude de la fonction *f*
   a. Déterminer les limites de *f* en 0 et en $+\infty$.
   b. Déterminer la fonction dérivée de *f* et construire le tableau de variations de la fonction *f*.

III. Calcul d'aire

On note *g* la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. Donner la dérivée de la fonction *g*.
2. A l'aide du résultat précédent, déterminer une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 3 (commun) [4 points]

Le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}e^{2x}-2,1e^{x}+1,1x+1,6$$

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-5\leq x\leq 4$, $-4\leq y\leq 4$.
   Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur la copie.

2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
   a) Sur les variations de la fonction *f* ?
   b) Sur le nombre de solutions de l'équation $f\left(x\right)=0$?

3. On se propose maintenant d'étudier la fonction *f*.
   a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x}-2,1e^{x}+1,1\geq 0$.
   b) Etudier les variations de la fonctions de la fonction *f*.
   c) Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f\left(x\right)=0$.

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction *f* sur l'intervalle $\left[-0,05;0,15\right]$, de façon à visualiser les résultats de la question 3.
   Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée *y* peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

Exercice 4 (NON spécialité mathématiques uniquement) [5 points]

La feuille annexe donnée portera les constructions demandées au cours de l'exercice.
Cette feuille annexe est à rendre avec la copie.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, le point A a pour affixe i.
On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq i$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-z^2}{z-i}$$

Le but de cet exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M.

1. **Un exemple**
   On considère le point K d'affixe $1+i$.
   a. Placer le point K.
   b. Déterminer l'affixe du point K' image de K par f.
   c. Placer le point K'.

2. **Des points pour lesquels le problème ne se pose pas**
   a. On considère le point L d'affixe $\frac{i}{2}$. Déterminer son image L' par f. Que remarque-t-on ?
   b. Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

3. **Un procédé de construction**
   On nomme G l'isobarycentre des points A, M et M', et g l'affixe de G.
   a. Vérifier l'égalité $g = \dfrac{1}{3\left(z-i\right)}$.
   b. En déduire que : si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3r}$.
   c. Démontrer que $\arg g = -\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)$.
   d. Sur la feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
   On nomme D' l'image de D par f. Déduire des questions précédentes la construction du point D' et la réaliser sur **la figure annexe à rendre avec la copie.**

Exercice 4 (spécialité mathématiques uniquement) [5 points]

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A d'affixe $3\,i$ et B d'affixe 6 ; unité graphique : 6 cm.

Partie A

1. Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B.

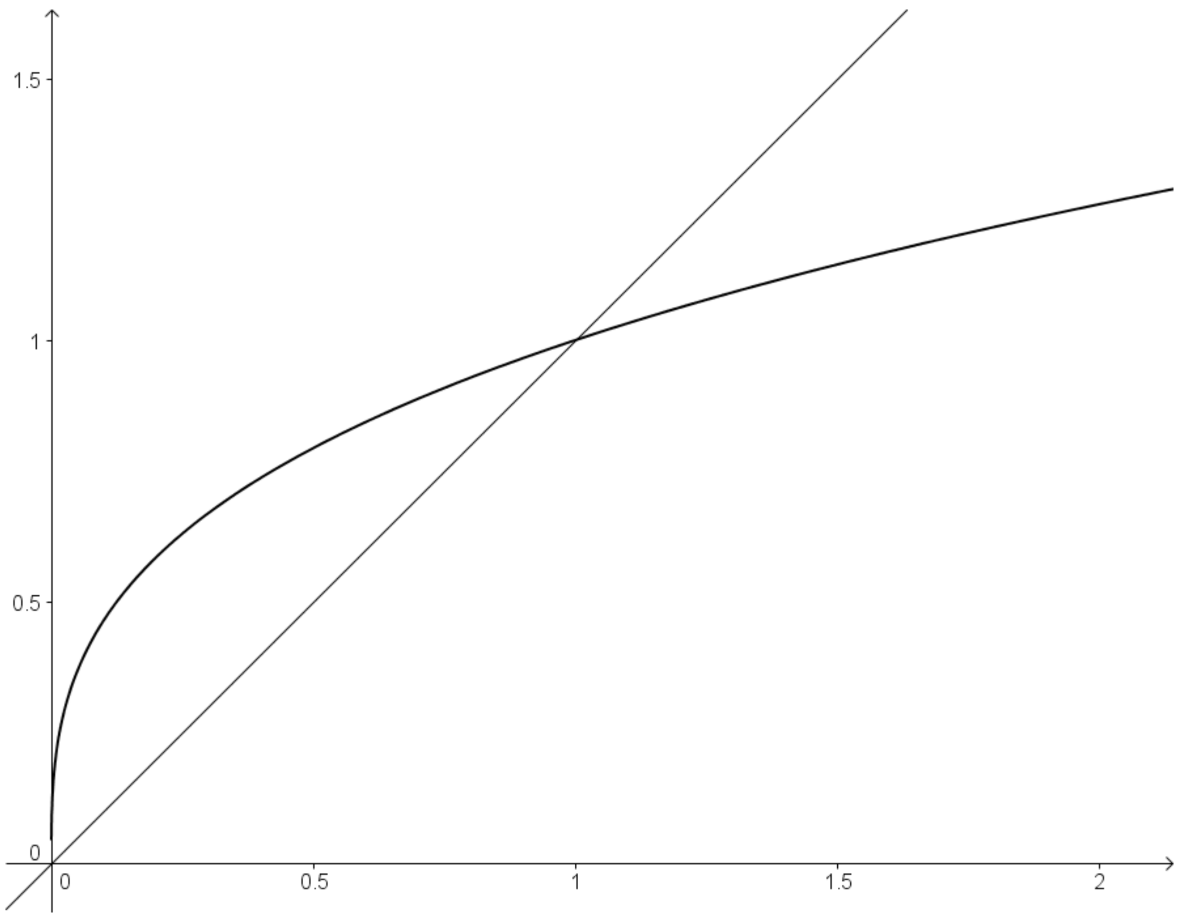
Partie B

1. Soit *f* la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe $z' = -2\,i\,\overline{z} + 6$, où $\overline{z}$ désigne le conjugué de *z*.
   Montrer que *f* possède un point invariant et un seul. On note K ce point.
2. Soit *h* l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{1}{2}$.
   On pose $g = f \circ h$.
   a. Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K.
   b. On désigne par M'' l'image du point M d'affixe *z* par la transformation *g*.
   Montrer que l'écriture complexe de *g* est $z'' = -i\,\overline{z} + 2 + 2\,i$, où z'' est l'affixe de M''.
   c. Montrer qu'il existe sur l'axe $\left(\mathrm{O};\vec{v}\right)$ un unique point invariant par *g* ; on le note L.
   Reconnaître alors la transformation *g*.
   d. En déduire que la transformation *f* est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe $\left(\mathrm{KL}\right)$
   Préciser les éléments caractéristiques de h'.
3. Déterminer les droites Δ telles que $f\left(\Delta\right)$ et Δ soient parallèles.

FIN DU SUJET

ANNEXE / Nom et prénom :

Exercice 1.



ANNEXE / Nom et prénom :

Exercice 4.

Sur la figure ci-dessous le segment [OI] tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ est partagé en six segments d'égale longueur.