TS 5-6-7-8

BAC BLANC MATHS du 01-04-11

DUREE 4 heures

TOUTES CALCULETTES

Exercice 1 (6p):

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+4\right).$$

PARTIE A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) Montrer que sur l'intervalle $[2\,;\,3]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α. Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1}.
   (c) Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

PARTIE B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = f(u_n)$.
La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1. À partir de u_0, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
2. Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse α.
3. (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante
   (c) Démontrer que la suite (u_n) converge.
   (d) Déterminer sa limite.

Exercice 2(5p) :

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).
D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\ ;+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = -\frac{1}{20}\, y(3 - \ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante :
Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\ ;+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\ ;+\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si, et seulement si, la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\ ;+\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(H) \quad z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\ ;+\infty[$:

$$f(t) = \exp\left(3 + C \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto e^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp\left(3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\ ;+\infty[$.
c. Résoudre dans $[0\ ;+\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0{,}02$.
Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Exercice 3(4p) :

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.
On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1. a. Donner l'équation réduite de la tangente $(\mathcal{T})$ au point A à la courbe Γ.

b. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de $(\mathcal{T})$ avec l'axe des ordonnées.
Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de $(\mathcal{T})$; la réaliser sur la figure de l'annexe

2. Restitution organisée de connaissances.
On suppose connue la propriété :
Pour tout couple $(x ; y)$ de nombres réels strictement positifs, on a :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a :

$$\ln(\sqrt{m}) = \frac{1}{2}\ln(m).$$

3. Utiliser le résultat de la question **2.** pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$.
Expliquer la construction et la réaliser sur la figure précédente (on laissera les traits de construction apparents).

Exercice 4(5p) : POUR LES **NON-SPECIALISTES** UNIQUEMENT

Le plan complexe est rapporté au repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

▶ **1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$.
Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses).

▶ **2.** Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1+i$ et $z_B = 2i$.
À tout complexe z différent de z_A on associe le complexe $z' = \dfrac{z-2i}{z-1-i}$.

a) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
Montrer que $B \in (E)$. Déterminer et construire l'ensemble (E).
b) Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
Déterminer et construire (F).

▶ **3.** Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{5}{2}\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Calculer l'affixe du point B′, image de B par R et l'affixe du point I′, image par R du point $I\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$.

b) Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

Exercice 4bis (5p) : POUR LES **SPECIALISTES** UNIQUEMENT

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
L'unité graphique est 2 cm.
Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane **indirecte** f d'écriture complexe :

$$z' = i\sqrt{2}\bar{z} + 2i\sqrt{2} - 2,$$

et d'en donner deux décompositions.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane **directe** autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes, avec $a \neq 1$. (et $a \neq 0$)
Déterminer en fonction de a et de b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

Partie B – Première décomposition de *f*

Soit g la similitude plane **directe** d'écriture complexe :

$$z' = i\sqrt{2}z + 2i\sqrt{2} - 2.$$

1. Préciser les éléments caractéristiques de g (centre, rapport, angle).

2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$.

Partie C – Deuxième décomposition de *f*

1. Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 2$.
Montrer que pour tout point N appartenant à $\mathcal{D}$, le point $f(\mathrm{N})$ appartient aussi à $\mathcal{D}$.

3. Soit σ la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et k la transformation définie par $k = f \circ \sigma$.

a. Donner l'écriture complexe de σ.
(*Indication* : on pourra poser $z' = a\bar{z} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b.)

b. En déduire que l'écriture complexe de k est :

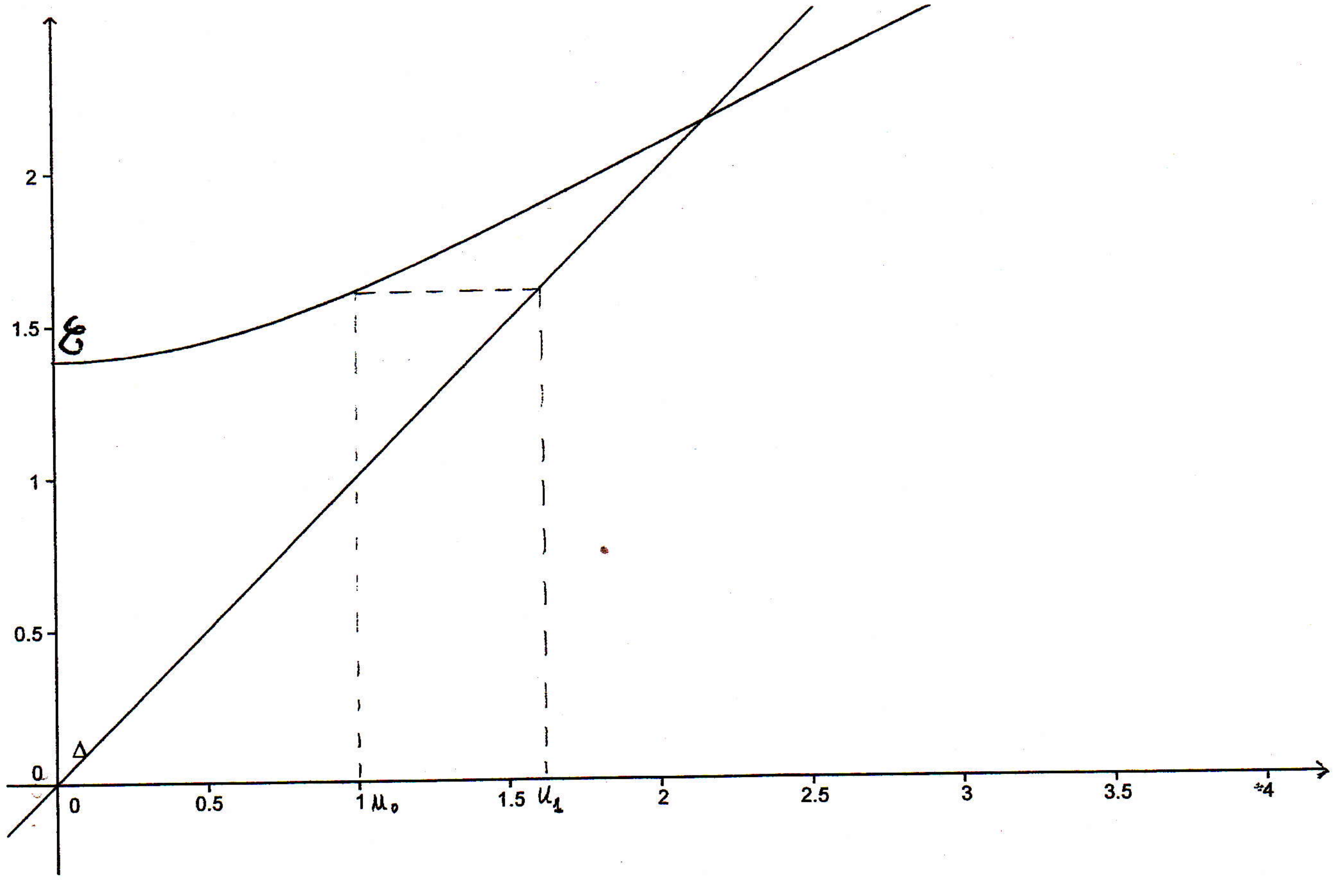
$$z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2.$$

c. Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.

4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie.

NOM :

Annexe exercice 1



Annexe exercice 3