

Corrigé du Bac Blanc du 1^{er} Trimestre

Exercice 1

1) a. Remarquons déjà qu'en posant $X = -x$, on $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-Xe^{-X}) = - \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$.

Alors, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$, on obtient par quotient : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$.

Ceci implique que C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

b. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} = x \frac{e^x - 1 + 1}{e^x - 1} = x \left(\frac{e^x - 1}{e^x - 1} + \frac{1}{e^x - 1} \right) = x \left(1 + \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x - 1} \right) = 1 + 0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc par produit : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.

c. D'après la question précédente, on a pour tout $x \neq 0$, on a $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{e^x - 1} \right) = x + \frac{x}{e^x - 1}$ donc :

$$f(x) - x = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par différence, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$ et en passant à l'inverse, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0.$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x$ est bien asymptote à C en $+\infty$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (c'est une limite de cours).

On alors, par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1} = 1 = f(0).$$

Donc f est bien continue en 0.

3) a. Posons $h(x) = e^x - x - 1$.

La fonction h est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} et :

$$h'(x) = e^x - 1.$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} et $e^0 = 1$, on a $h(0) = 0$ et :

- Si $x < 0$, $e^x < 1 \Leftrightarrow h'(x) < 0 \Leftrightarrow h$ est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0 [\Leftrightarrow h(x) > h(0)$ sur $] -\infty ; 0 [$;
- Si $x > 0$, $e^x > 1 \Leftrightarrow h'(x) > 0 \Leftrightarrow h$ est strictement croissante sur $] 0 ; +\infty [\Leftrightarrow h(x) > h(0)$ sur $] 0 ; +\infty [$.

Ceci montre que $h(x) \geq 0$ sur \mathbb{R} avec égalité si et seulement si $x = 0$ et ainsi :

$$\underline{e^x \geq x + 1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec égalité si et seulement si } x = 0.}$$

b. Sur \mathbb{R}^* , f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables (avec le dénominateur non nul).

Et, $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(xe^x + e^x)(e^x - 1) - xe^x(e^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x[(x+1)(e^x - 1) - xe^x]}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x[xe^x + e^x - x - 1 - xe^x]}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - x - 1)}{(e^x - 1)^2}$$

Et finalement, on trouve bien $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$ avec (ô surprise) $g(x) = e^x - x - 1 = h(x)$.

c. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) > 0$ (d'après a), $e^x > 0$ et $(e^x - 1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

Or, f est continue en 0 (il n'y a pas de « saut »), donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

On obtient alors le tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	0	$+\infty$

↗

4) a. Comme f est définie sur \mathbb{R} , $\forall x \neq 0$, $f(-x)$ a du sens et :

$$f(-x) = \frac{-xe^{-x}}{e^{-x} - 1} = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{e^{-x}(e^x - 1)} = \frac{x}{e^x - 1}.$$

On a $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$ et quand $x \neq 0$, $-x \neq x$ donc $M' \neq M$ et (MM') est effectivement une droite.

Son coefficient directeur a est donné par $a = \frac{y_M - y_{M'}}{x_M - x_{M'}}$, soit :

$$a = \frac{f(x) - f(-x)}{x - (-x)} = \frac{\frac{xe^x}{e^x - 1} - \frac{x}{e^x - 1}}{2x} = \frac{\frac{xe^x - x}{e^x - 1}}{2x} = \frac{x(e^x - 1)}{2x(e^x - 1)} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Remarquons que ce coefficient est indépendant de x donc de la position de M .

b. Si f est dérivable en 0, sa courbe C admet une tangente au point d'abscisse 0. Or, avec les notations précédentes, $[MM']$ représente la corde de la portion de C comprise entre M et M' . Quand x tend vers 0, (MM') tend alors vers la tangente à C au point d'abscisse 0 donc la pente de (MM') tend vers la pente de cette tangente. Comme la pente de (MM') est constante, égale à $\frac{1}{2}$ et la pente de la tangente au point d'abscisse 0 vaut $f'(0)$, le résultat précédent suggère (très fortement !) que :

$$\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}.$$

Autre méthode, plus analytique :

Si f est dérivable en 0, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe et vaut $f'(0)$. Mais alors, on peut écrire, avec $f(0) = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - 1}{-x} = f'(0) \quad \text{soit} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = f'(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - 1}{x} = -f'(0).$$

Or, $\forall x \neq 0$, $\frac{f(x) - f(-x)}{x - (-x)} = \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \frac{f(x) - 1 - f(-x) + 1}{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{f(x) - 1}{x} - \frac{f(-x) - 1}{x} \right)$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x - (-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{f(x) - 1}{x} - \frac{f(-x) - 1}{x} \right) = \frac{1}{2} (f'(0) + f'(0)) = f'(0)$.

D'après la question a, $\forall x \neq 0$, $\frac{f(x) - f(-x)}{x - (-x)} = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x - (-x)} = \frac{1}{2}$ et ainsi $\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$.

Exercice 2

1) g est dérivable sur \mathbb{R}_+ comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+ et $g'(t) = \frac{V}{4}e^{-t} - \frac{V}{4}te^{-t}$.

On a alors $\forall t \in \mathbb{R}_+, g'(t) + g(t) = \frac{V}{4}e^{-t} - \frac{V}{4}te^{-t} + \frac{V}{4}te^{-t} = \frac{V}{4}e^{-t}$ donc g est bien solution de (E).

2) Remarquons déjà que toute solution f de (E) est dérivable sur \mathbb{R}_+ de même que g et toute solution de (E').

Alors :

$$f = g + u \text{ avec } u \text{ solution de } (E')$$

$$\Leftrightarrow f - g \text{ est solution de } (E')$$

$$\Leftrightarrow (f - g)' + f - g = 0$$

$$\Leftrightarrow f' - g' + f - g = 0$$

$$\Leftrightarrow f' + f = g' + g$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t) + f(t) = g'(t) + g(t) = \frac{V}{4}e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow f \text{ solution de } (E).$$

3) (E') : $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ donc toute solution de (E') est de la forme $u(t) = Ke^{-t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Alors, d'après la question précédente, toutes les solutions de (E) sont de la forme $f(t) = g(t) + Ke^{-t}$ soit :

$$\boxed{f(t) = \frac{V}{4}te^{-t} + Ke^{-t}} \text{ avec } K \text{ constante réelle.}$$

4) T est solution de (E) donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, T(t) = \frac{V}{4}te^{-t} + Ke^{-t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

De plus, d'après l'énoncé, $t = 0$ au moment où on arrive au réveillon et alors, le taux d'alcoolémie est déjà de 0,1 g/L donc $T(0) = 0,1$. Or, $T(0) = 0 + K = K$ donc $K = 0,1$.

Par ailleurs, on a aussi $V = 20$ mL, donc $\boxed{T(t) = 5te^{-t} + 0,1e^{-t}}$.

5) $\forall t \in \mathbb{R}_+, T(t) = 5te^{-t} + 0,1e^{-t}$.

On vient de voir que T est solution de (E) donc T est dérivable sur \mathbb{R}_+ , et :

$$T'(t) = 5e^{-t} - 5te^{-t} - 0,1e^{-t} = (4,9 - 5t)e^{-t} = 5(0,98 - t)e^{-t}$$

$\forall t \in \mathbb{R}_+, 5e^{-t} > 0$ donc $T'(t)$ est du signe de $0,98 - t$. On obtient alors le tableau :

t	0	0,98	$+\infty$
$T'(t)$		+	0 -
T			

D'après le tableau ci-dessus, T est maximal quand $t = 0,98$ h soit au bout d'environ 59 min.

6) Ici, on a toujours $T(t) = 5te^{-t} + 0,1e^{-t}$.

a. Pour conduire en respectant la loi, il faut que $T(t) \leq 0,5$. Or, si on prend le volant immédiatement après ingestion, on le prend à $t = 0$ et $T(0) = 0,1 \leq 0,5$, ce qui est acceptable.

Néanmoins, le tableau de variations de T montre qu'initialement, la fonction T est croissante vers son maximum $T(0,98) \approx 1,89$ g/L. Ainsi, le taux d'alcoolémie va rapidement dépasser 0,5 g/L.

Un tableau de valeurs de T montre que $T(0,08) \approx 0,46 < 0,5$ et $T(0,09) \approx 0,503 > 0,5$ donc le taux d'alcoolémie va dépasser 0,5 g/L au bout d'environ 0,09 h soit un peu plus de 5 min ce qui est assez court ! Il n'est donc pas très prudent de prendre le volant immédiatement après les deux coupes de champagne.

- b. Pour prendre le volant en toute sécurité, il faut attendre que T soit décroissant donc $t > 0,98$ et avoir à nouveau $T(t) \leq 0,5$.

A la calculatrice, on obtient :

$$T(3,58) \approx 0,502 > 0,5 \quad \text{et} \quad T(3,59) \approx 0,498 < 0,5.$$

Donc, il faut attendre environ 3,59 h soit environ 3 h 35 min. avant de prendre le volant.

- 7) En reprenant le raisonnement de la question précédente ais avec un seuil de tolérance de 0,2 g/L au lieu de 0,5 g/L, on obtient :

$$T(4,78) \approx 0,2015 > 0,2 \quad \text{et} \quad T(4,79) \approx 0,1999 < 0,2.$$

Donc, un jeune conducteur doit attendre environ 4,79 h soit environ 4 h 47 min. avant de prendre le volant.

Exercice 3 – QCM

- 1) C'est **FAUX**. Le conjugué de $2 + 3i(1 + i) = -1 + 3i$ est $2 - 3i(1 - i) = -1 - 3i$.
- 2) C'est **FAUX**. $(1 + i)^2 = 2i$ qui est bien imaginaire pur mais $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$ qui est réel.
- 3) C'est **VRAI**. Si M a pour affixe $z = x + iy$, on a $-\bar{z} = -(x - iy) = -x + iy$ et le point d'affixe $-x + iy$ est bien le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.
- 4) C'est **VRAI**. On a $\frac{1+3i}{-1-2i} = -\frac{1+3i}{1+2i} = -\frac{(1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = -\frac{1+3i-2i-6i^2}{1^2-(2i)^2} = -\frac{1+3i-2i+6}{1+4} = -\frac{7+i}{5} = \frac{-7-i}{5}$.

Exercice 4 – (NON spé)

Partie A

Posons dans toute cette partie $I = [0 ; \frac{\pi}{4}]$.

1. On sait que la fonction tangente est définie sur I et que $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$ donc une primitive de la fonction h sur I est $H(x) = \tan x$.

2. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos^3 x$ sont définies et dérivables sur I et la seconde ne s'annule pas sur cet intervalle donc G est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I .

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{(\cos x)(\cos^3 x) - (\sin x)(-3\sin x \cos^2 x)}{\cos^6 x} = \frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} = \frac{\cos^4 x + 3(1 - \cos^2 x)\cos^2 x}{\cos^6 x} \\ &= \frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x - 3\cos^4 x}{\cos^6 x} = \frac{3\cos^2 x - 2\cos^4 x}{\cos^6 x} = \frac{3\cos^2 x}{\cos^6 x} - \frac{2\cos^4 x}{\cos^6 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

3. La fonction f est continue sur I comme inverse d'une puissance de la fonction cosinus qui continue et non nulle sur I . Donc, f admet des primitives sur I .

D'après les questions précédentes, on peut écrire, $\forall x \in I$:

$$f(x) = \frac{1}{\cos^4 x} = \frac{1}{3} \frac{3}{\cos^4 x} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2}{\cos^2 x} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Soit $f(x) = \frac{1}{3} G'(x) + \frac{2}{3} H'(x) = \left[\frac{1}{3} G(x) + \frac{2}{3} H(x) \right]'$.

Alors, toute primitive F de f est de la forme $F(x) = \frac{1}{3} G(x) + \frac{2}{3} H(x) + K$ avec K constante réelle.

4. D'après la question précédente :

$$\Phi(x) = \frac{1}{3} G(x) + \frac{2}{3} H(x) + K = \frac{1}{3} \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3} \tan x + K = \frac{1}{3} \frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{2}{3} \tan x + K = \frac{\tan x}{3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \right) + K$$

Alors, comme $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, on a $\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{3} + K = 0$ donc $K = -\frac{4}{3}$.

Finalement, $\Phi(x) = \frac{\tan x}{3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \right) - \frac{4}{3}$.

Partie B

Remarquons préalablement que f et g sont continues sur \mathbb{R} en tant que produits de fonctions continues sur \mathbb{R} donc $f + g$ et $f - g$ sont continues sur \mathbb{R} aussi (somme et différence de fonctions continues) et ainsi, les quatre fonctions $f, g, f + g$ et $f - g$ admettent des primitives sur \mathbb{R} .

1. $\forall x \in \mathbb{R}, s(x) = x \cos^2 x + x \sin^2 x = x (\cos^2 x + \sin^2 x) = x$ donc une primitive de s est S telle que $S(x) = \frac{x^2}{2}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, d(x) = x \cos^2 x - x \sin^2 x = x (\cos^2 x - \sin^2 x) = x \cos(2x)$.

Posons $\phi(x) = a x \sin(2x) + b \cos(2x)$ avec a et b réels fixés.

ϕ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et :

$$\phi'(x) = a \sin(2x) + 2a x \cos(2x) - 2b \sin(2x) = (a - 2b) \sin(2x) + 2a x \cos(2x).$$

Pour que ϕ soit une primitive de d sur \mathbb{R} , il faut que $\phi' = d$ soit $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(a - 2b) \sin(2x) + 2a x \cos(2x) = x \cos(2x).$$

Par identification, on obtient $a - 2b = 0$ et $2a = 1$ d'où l'on tire $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{a}{2} = \frac{1}{4}$.

Finalement, la fonction D définie par $D(x) = \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x)$ est une primitive de d sur \mathbb{R} .

3. Remarquons que $f = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}(f - g) = \frac{1}{2}(s + d)$ et $g = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}(f - g) = \frac{1}{2}(s - d)$ donc :

- Toute primitive F de f est de la forme :

$$F(x) = \frac{S(x) + D(x)}{2} = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin(2x) + \frac{1}{8} \cos(2x) + K$$

où K est une constante réelle.

- Toute primitive G de f est de la forme :

$$G(x) = \frac{S(x) - D(x)}{2} = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin(2x) - \frac{1}{8} \cos(2x) + K'$$

où K' est une constante réelle.

Exercice 4 – (spé)

1) Un rep-unit n'est jamais pair donc 2 n'apparaît pas dans sa décomposition.

Un rep-unit ne se termine ni par 0 ni par 5 il n'est donc pas divisible par 5, donc 5 n'apparaît pas dans sa décomposition.

$$2) N_3 = 111 = 3 \times 37$$

$$N_4 = 1111 = 11 \times 101$$

$$N_5 = 11111 = 41 \times 271$$

3) a. *Rappel* : tout nombre entier est congru à son chiffre des unités modulo 10.

Raisonnons par disjonction des cas :

- Si $n \equiv 0 \pmod{10}$ alors $n^2 \equiv 0 \pmod{10}$;
- Si $n \equiv 1 \pmod{10}$ alors $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$;
- Si $n \equiv 2 \pmod{10}$ alors $n^2 \equiv 4 \pmod{10}$;
- Si $n \equiv 3 \pmod{10}$ alors $n^2 \equiv 9 \pmod{10}$;
- Si $n \equiv 4 \pmod{10}$ alors $n^2 \equiv 6 \pmod{10}$;
- Si $n \equiv 5 \pmod{10}$ alors $n^2 \equiv 5 \pmod{10}$;
- Si $n \equiv 6 \pmod{10}$ alors $n^2 \equiv 6 \pmod{10}$;
- Si $n \equiv 7 \pmod{10}$ alors $n^2 \equiv 9 \pmod{10}$;
- Si $n \equiv 8 \pmod{10}$ alors $n^2 \equiv 4 \pmod{10}$;
- Si $n \equiv 9 \pmod{10}$ alors $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

On en déduit de cette liste que si n^2 se termine par 1, c'est-à-dire si $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$, alors nécessairement :

$$n \equiv 1 \pmod{10} \text{ ou } n \equiv 9 \pmod{10}.$$

Donc, si n^2 se termine par 1 alors n se termine par 1 ou 9.

b. Si $n \equiv 1 \pmod{10}$ alors il existe un entier m tel que $n - 1 = 10m$ soit $n = 10m + 1$.

Si $n \equiv 9 \pmod{10}$ alors il existe un entier m' tel que $n - 9 = 10m'$ soit $n = 10m' + 9 = 10(m' + 1) - 1$ et $m' + 1$ est entier.

Ainsi, n s'écrit sous la forme $10m + 1$ ou $10m - 1$ avec m entier.

c) On calcule alors :

$$n^2 = (10m + 1)^2 = 100m^2 + 20m + 1 = 20(5m^2 + m) + 1 = 20k + 1 \text{ avec } k = 5m^2 + m \text{ entier ;}$$

ou bien :

$$n^2 = (10m - 1)^2 = 100m^2 - 20m + 1 = 20(5m^2 - m) + 1 = 20k + 1 \text{ avec } k = 5m^2 - m \text{ entier.}$$

Dans les deux cas, on obtient bien $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$.

4) Si $k \geq 2$, on peut écrire :

$$N_k = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{k-1} = (1 + 10) + 20(5 + \dots + 5 \cdot 10^{k-3}) = 11 + 20q \text{ avec } q \in \mathbb{N}.$$

Comme $0 \leq 11 < 20$, le reste de la division de N_k par 20 est 11.

5) Si N_k était un carré alors, comme N_k se termine par le chiffre 1, on aurait, d'après 3c, $N_k \equiv 1 \pmod{20}$.

Le reste de la division euclidienne de N_k par 20 serait 1. Or, on a trouvé un reste de 11 dans la question précédente, donc un rep-unit différent de 1 n'est jamais un carré.