

Durée 4 heures.

La calculatrice graphique est autorisée.

Le barème est fourni à titre indicatif.**Exercice 1 (commun)****[6 points]**On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

b. Etablir que, pour tout nombre réel  $x$  non nul, on a :

$$f(x) = x \left( 1 + \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .c. Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

2. Donner, sans démontrer, la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$  et démontrer que  $f$  est continue en 0.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ , on a  $e^x \geq x + 1$  et que l'égalité n'a lieu que pour  $x = 0$ .

b. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  et déterminer la fonction  $g$  telle que, pour tout

$$\text{réel } x \text{ non nul } f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}.$$

c. Donner, en justifiant, le tableau des variations de  $f$ .

4. Soit  $x$  un nombre réel non nul et les points  $M(x; f(x))$  et  $M'(-x; f(-x))$  de  $\mathcal{C}$

a. Etablir que  $f(-x) = \frac{x}{e^x - 1}$ , puis déterminer le coefficient directeur de la droite  $(MM')$ .

b. On admet que la fonction  $f$  est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

**Exercice 2 (commun)****[6 points]**

Le taux d'alcoolémie  $T(t)$ , exprimé en g/L, d'une personne ayant absorbé un volume d'alcool donné  $V$  (en mL) vérifie l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{V}{4} e^{-t} \quad (E)$$

Où  $t$  est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures).

1. On pose,  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,  $g(t) = \frac{V}{4} t e^{-t}$ . Montrer que  $g$  est solution de  $(E)$ .

2. Prouver que :

$$f \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow f = g + u \text{ où la fonction } u \text{ est solution de } (E') \quad y' + y = 0$$

3. Résoudre  $(E')$  puis  $(E)$ .

4. Le soir du 31 décembre, vous avez eu tellement de mal à choisir vos atours de fêtes que vous avez dû prendre un verre pour vous soutenir et vous arrivez à votre réveillon avec un taux d'alcoolémie de 0,1g/L. Là, vous avalez deux coupes de champagne d'affilée, soit un volume  $V$  de 20 mL d'alcool.

En prenant  $t = 0$  au moment où vous arrivez au réveillon, montrer que :

$$T(t) = (5t + 0,1) e^{-t}.$$

5. Etudier les variations de  $T$  et en déduire le temps au bout duquel le taux d'alcoolémie est maximal.

6. Le taux d'alcoolémie maximal toléré par le code de la route est de 0,5 g/L.

a. Pouvez-vous prendre le volant tout de suite ? Si oui, est-ce très prudent ? Justifier.

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer au centième d'heure près, puis à la minute près, le temps au bout duquel il serait prudent de prendre le volant.

7. En réalité, un deuxième taux de 0,2 g/L est préconisé pour certaines catégories de conducteurs, en particulier les conducteurs novices (titulaires d'un permis de conduire de moins de 2 ans). Vous êtes dans cette catégorie donc reprenez la question 6b (et considérez de passer au jus de fruit...).

**Exercice 3 – VRAI/FAUX - (commun)****[4 points]**

Répondre sur votre copie par Vrai ou Faux (aucune justification n'est demandée).

- Une réponse exacte rapporte 1 point ;
  - Une réponse inexacte enlève 0,5 point ;
  - L'absence de réponse est comptée 0 point.
- Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. Le conjugué de  $2 + 3i(1+i)$  est  $2 - 3i(1+i)$ .
2. Si  $n$  est un entier naturel non nul pair alors  $(1+i)^n$  est imaginaire pur.
3. Dans le plan complexe, si  $M$  est un point d'affixe  $z$  alors le point d'affixe  $-\bar{z}$  est le symétrique de  $M$  par rapport à l'axe des ordonnées.
4. La forme algébrique du nombre complexe  $\frac{1+3i}{-1-2i}$  est  $\frac{-7-i}{5}$ .

**Exercice 4 (NON spécialité mathématiques uniquement)****[5 points]****Partie A**

1. Déterminer une primitive  $H$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  de la fonction :

$$h : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$$

2. On considère la fonction  $G$ , définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  par :

$$G(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

Montrer que  $G$  est dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  et que, pour tout réel  $x$  de cet intervalle, on a :

$$G'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$$

3. En déduire une primitive  $F$ , sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ , de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x}$$

4. Déterminer la primitive  $\Phi$  de la fonction  $f$  qui vérifie :  $\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

**Partie B**

On se propose de déterminer des primitives  $F$  et  $G$  sur  $\mathbb{R}$  des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x \cos^2 x \text{ et } g : x \mapsto x \sin^2 x$$

1. Soit la fonction  $s = f + g$  sur  $\mathbb{R}$ . Après avoir simplifié l'écriture de  $s$ , en déterminer une primitive  $S$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Sachant que  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ , déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $D : x \mapsto ax \sin(2x) + b \cos(2x)$  soit une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $d = f - g$ .
3. Dédurre de ce qui précède une primitive  $F$  et une primitive  $G$  de, respectivement,  $f$  et  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4 (spécialité mathématiques uniquement)****[5 points]**

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 *etc.* sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec le chiffre 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent les mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour  $k$  entier strictement positif, on note  $N_k$  le rep-unit qui s'écrit à l'aide de  $k$  chiffres 1.

Ainsi :  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 11$ ,  $N_3 = 111$ , ...

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit (on justifiera brièvement la réponse) ;
2. Donner la décomposition en facteurs premiers de  $N_3$ ,  $N_4$  et  $N_5$  ;
3. Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de  $n^2$  se termine par le chiffre 1.
  - a. Montrer que, dans son écriture décimale,  $n$  se termine lui-même par 1 ou par 9 ;
  - b. Montrer qu'il existe un entier  $m$  tel que  $n$  s'écrive sous la forme  $10m+1$  ou  $10m-1$  ;
  - c. En déduire que  $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$ .
4.
  - a. Soit  $k \geq 2$ . Quel est le reste de la division de  $N_k$  par 20 ?
  - b. En déduire qu'un rep-unit différent de 1 n'est pas un carré.

---

**FIN DU SUJET**

---