Correction du BB1. TS. Décembre 2010.

Exercice 1 :

1) Par définition $F'(x) = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$
   Cherchons le signe du dénominateur : $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0$
   Donc $x^2 + x + 1$ est « toujours du signe de a » c'est-à-dire strictement positif. De même $x^2 + 1 > 0$ donc $F'(x) > 0$ donc F est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

2) a) Les fonctions H et K sont définies et dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ comme sommes de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.

$$H'(x) = F'(x) - 1 = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} - 1 = \frac{-x}{x^2+x+1}$$

Donc : $H'(x) \leq 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$

Donc H est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

$$K'(x) = F'(x) - \frac{2}{3} = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

Donc : $K'(x) \geq 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

Donc K est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b) Tableau de variations des fonctions.

x	0		$+\infty$
H	0	$\searrow$	

H(0)= F(0)-0= 0 donc H(x)≤ 0 sur $[0\,;\,+\infty[$

X	0		$+\infty$
K		$\nearrow$	
	0		

K(0)=F(0)-2/3*0= 0 donc K(x)≥ 0 sur $[0\,;\,+\infty[$

On a donc : $F(x) - x \leq 0 \; sur \; [0\,;\,+\infty[$ Et $F(x) - \frac{2}{3}x \geq 0 \; sur \; [0\,;\,+\infty[$

Donc : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x sur \; [0\,;\,+\infty[$

c) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{3}x) = +\infty$ donc d'après le théorème de minoration par une fonction qui tend vers +∞,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$$

Exercice 2 :

A) 1) $y' + y = e^{-x}$. Soit $u(x) = xe^{-x}$ alors $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$.

On a alors : $u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$ donc u *est solution de* (E).

2) (E') : $y' + y = 0$ soit : $y' = -y$ d'après le cours, les solutions de cette équation sont les fonctions définies par : $f(x) = Ke^{-x}$ (K réel)

3)

$\mathrm{v - u}$ est solution de $(\mathrm{E}')\Leftrightarrow(v-u)' + (v-u)$=0

$$\Leftrightarrow v' - u' + v - u = 0$$

$$\Leftrightarrow v' + v = u' + u$$

$$\Leftrightarrow (v' + v)(x) = e^{-x} \quad \text{car } (u' + u)(x) = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow v \text{ est solution de } (E)$$

4) Les solutions de € sont donc les fonctions v définies par : $v(x) = u(x) + K\,e^{-x}$

Soit : $v(x) = (x + K)e^{-x}$ (K réel)

5) g est solution de (E) donc g(x)= $(x + K)e^{-x}$, or g(0) = 2 donc K = 2

g(x)= $(x + 2)e^{-x}$

B) 1) $f_k(x) = (x + k)\,e^{-x}$. f_k est défini et dérivable sur $\Re$

$f'_k(x) = e^{-x} - (x + k)\,e^{-x}$=$e^{-x}(1 - x - k)$

On en déduit le tableau de variations de f_k :

x	$-\infty$		1-k		$+\infty$
-x+1-k		+	0	-	
f'_k		+		-	
f_k		$\nearrow$		$\searrow$	

D'après le tableau de variations, f_k admet un maximum en 1-k.

3) Soit $M_k(1 - k; f_k(1 - k))$

$$f_k(1 - k) = (1 - k + 1)e^{-1+k} = e^{-1+k}$$

Donc $f_k(x_M)$=e^{-x_M} donc M appartient à Γ d'équation $y = e^{-x}$

Exercice 3 (7 points) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ définie sur $]0;+\infty[$.

1. a.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty\end{array}\right\}\text{par composition } \lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty\end{array}\right\}\text{par produit } \lim_{x\to 0}f(x)=+\infty.$$

b.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0 \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0 \\ \lim\limits_{X\to 0}e^{X}=1\end{array}\right\}\text{par composition } \lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=1\end{array}\right\}\text{par produit } \lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

c. De ces deux résultats, on en déduit l'existence de deux asymptotes à $\mathcal{C}$:
Du a : une asymptote verticale d'équation $x=0$
Du b : une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

2. a. f est dérivable sur $]0;+\infty[$comme produit d'une fonction dérivable par la composée de deux fonctions dérivables, et pour tout $x$de $]0;+\infty[$,

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x^2}\right)'e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}\times-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$$

D'où :

$$\boxed{f'(x)=-\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}$$

b. Sur $]0.+\infty[$, $2x+1>0$, $-\dfrac{1}{x^4}<0$ et $e^{\frac{1}{x}}>0$ (propriété de la fonction exponentielle : $e^{a}>0$ pour tout réel a).
<u>D'où $f'(x)<0$ sur</u> $]0;+\infty[$ <u>et f est strictement décroissante sur</u> $]0;+\infty[$.
Tableau de variation de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

c. f est d'une part dérivable donc continue sur $]0;+\infty[$, et d'autre part strictement décroissante de $]0;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$. Or $2 \in]0;+\infty[$ (ensemble des images). Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, 2 possède un antécédent et un seul dans $]0;+\infty[$ (ensemble des antécédents), autrement dit, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

La calculatrice nous donne :

$f(1{,}1) \approx 2{,}05$

$f(1{,}11) \approx 1{,}95$

Donc, on peut déduire que $\boxed{1{,}1 < \alpha < 1{,}11}$.

3. a. T_1 a pour équation :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

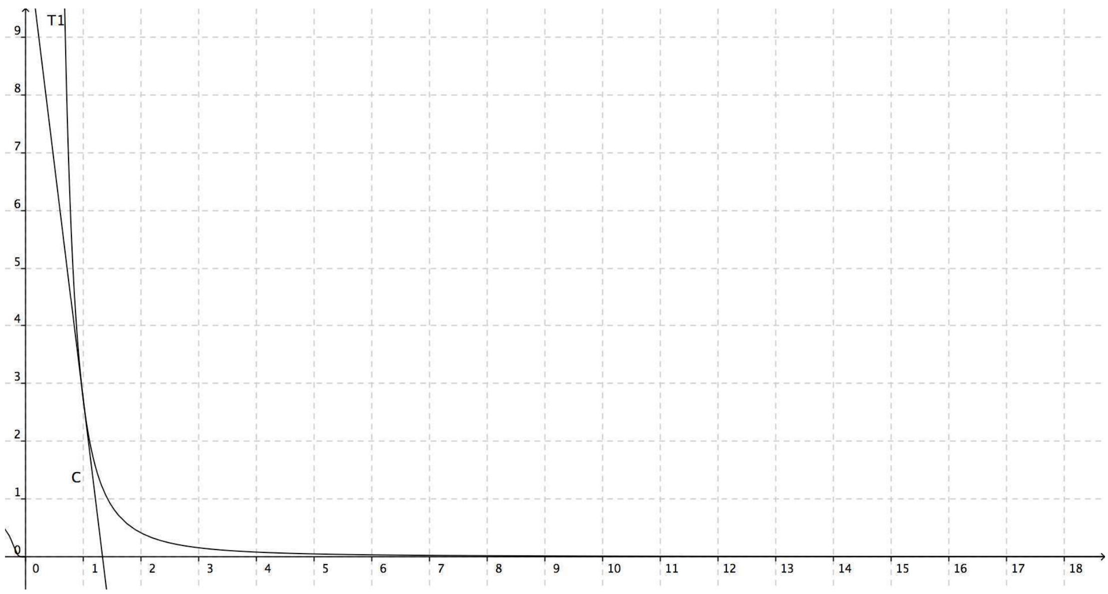
Or $f(1) = 1e^1 = e$ et $f'(1) = -1e^1(2+1) = -3e$.

D'où T_1 a pour équation :

$y = -3e(x-1)+e$, soit :

$\boxed{y = -3ex + 4e}$

b. Représentation graphique de C et de T_1.



4. a. Nous avons vu que f était continue sur $]0;+\infty[$, donc elle y admet des primitives.

b. f est de la forme « $-u'e^u$ ». Donc elle admet des primitives de la forme « $-e^u + C$ » avec $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et où C est une fonction constante. D'où les primitives F_k de f sont définies sur $]0;+\infty[$ par :

$F_k(x) = -e^{\frac{1}{x}} + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

On veut $F(1) = 0 \Leftrightarrow -e^1 + k = 0 \Leftrightarrow k = e$.

Finalement, la primitive cherchée est définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{F(x) = -e^{\frac{1}{x}} + e}$

Exercice 4 : (non spé)

1)soit $A(x) = x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = x + 1 - \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = x + 1 - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{x^2-1-(\sqrt{x}-1)}{x-1} = f(x)$*, pour tout* x *du domaine de définition*

$2)a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 0\ donc\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$b)on\ calcule$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{x}+1} = 0\ donc, la\ droite\ D{:}\ y = x + 1\ est$ $asymptote$ à $\mathcal{C}_f\ en + \infty$

c) on a : $f(x) - (x+1) = -\frac{1}{\sqrt{x}+1} < 0$ *donc* $\mathcal{C}_f$*est en-dessous de son asymptote sur le domaine de définition*

$3)a)\ \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$b)pour\ que\ f\ soit\ continue\ , il\ faut\ que\ \lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = a, or\ \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$

d'où: $a = \frac{3}{2}$

Exercice 4bis : (spé)

1)a)$2009 = 11 \times 182 + 7$ *le reste est égal à 7*

b)$2^{10} = 1024 = 93 \times 11 + 1$, *le reste est égal à 1*

c)on a: $2009 = 200 \times 10 + 9$ *donc :*$2^{2009} = (2^{10})^{200} \times 2^9$ et $2^9 = 512 = 11 \times 46 + 6$
d'où :$2^9 \equiv 6(11)$ et $2^{2009} \equiv 1^{200} \times 6\ (11)$$et$ $2009 \equiv 7(11)$
donc : $2^{2009} + 2009 \equiv 6 + 7(11)$$et$ $13 \equiv 2(11), le\ reste\ est\ 2$

2)a)d_n $divise$ A_n et A_{n+1} $donc$ d_n $divise$ $A_{n+1} - A_n = 2^{n+1} + p - 2^n - p = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$*, on a :* d_n $divise$ 2^n

b) comme $n \geq 1, 2^n$ $est\ pair, d'$où A_n $a\ la\ même\ parité\ que\ p$*(la somme de deux nombres pairs est paire, la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire)*

c)On a vu que A_n et A_{n+1} *ont la même parité (celle de p) (n* ≥ 1*)*
si p est pair, A_n et A_{n+1} *sont divisibles par 2, donc 2 divise* d_n *,* d_n $est\ pair$
si p est impair, A_n et A_{n+1} *sont impairs, donc non divisibles par 2, et* d_n $est\ impair$
soit $p = 2009, p\ est\ donc\ impair\ donc\ d_{2009}\ est\ impair, de\ plus, d_{2009} divise 2^{2009}$*,le seul diviseur impair de* 2^{2009} *est* 1 *donc* $2^{2009} + 2009$ $et\ de$ $2^{2010} + 2009$ $sont\ premiers\ entre\ eux$