

**Durée 4 heures.**  
**La calculatrice graphique est autorisée.**  
**Le barème est fourni à titre indicatif.**

**Exercice 1 (commun)****[3 points]**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$  et  $F$  la primitive de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  telle que  $F(0) = 0$ . On ne cherchera pas à exprimer  $F(x)$ .

1. Etudier les variations de  $F$  sur  $[0; +\infty[$ .
2. On définit sur  $[0; +\infty[$  les fonctions  $H$  et  $K$  par :  $H(x) = F(x) - x$  et  $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$ .
  - a. Etudier les variations de  $H$  et  $K$  sur  $[0; +\infty[$ .
  - b. En déduire que pour tout  $x \geq 0$ , on a :  $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$ .
  - c. Déterminer alors en justifiant la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

**Exercice 2 (commun)****[5 points]**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

**Partie A**

On considère l'équation différentielle :

$$y' + y = e^{-x} \quad (E)$$

1. Montrer que la fonction  $u$  définie sur l'ensemble des nombres réels par  $u(x) = xe^{-x}$  est solution de l'équation différentielle  $(E)$ .
2. On considère l'équation différentielle :

$$y' + y = 0 \quad (E')$$

Résoudre l'équation différentielle  $(E')$ .

3. Soit  $v$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $v$  est une solution de l'équation différentielle  $(E)$  si, et seulement si, la fonction  $v - u$  est solution de l'équation différentielle  $(E')$ .
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle  $(E)$ .
5. Déterminer l'unique solution  $g$  de l'équation différentielle  $(E)$  telle que  $g(0) = 2$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f_k$  définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :

$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}$$

où  $k$  est un nombre réel donné.

On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction  $f_k$  admet un maximum en  $x = 1 - k$ .
2. On note  $M_k$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_k$  d'abscisse  $1 - k$ . Montrer que le point  $M_k$  appartient à la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y = e^{-x}$ .

### Exercice 3 (commun)

[7 points]

On note  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

L'unité graphique est 1 cm.

1. Etude des limites
  - a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  quand  $x$  tend vers 0.
  - b. Déterminer la limite de la fonction  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
  - c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats pour la courbe  $\mathcal{C}$  ?
2. Etude des variations de la fonction  $f$ 
  - a. Démontrer que la dérivée de la fonction  $f$  s'exprime pour tout réel  $x$  strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1)$$

- b. Déterminer le signe de  $f'$  et en déduire le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - c. Démontrer que l'équation  $f(x) = 2$  a une unique solution notée  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$  et donner la valeur approchée de  $\alpha$  arrondie au centième.
3. Représentation graphique de la courbe  $\mathcal{C}$
- a. Déterminer l'équation réduite de la tangente  $\mathcal{T}_1$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.
  - b. Tracer  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{C}$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
4. Une primitive de  $f$
- a. Pourquoi la fonction  $f$  admet-elle des primitives sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  ?
  - b. Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1.

**Exercice 4 (NON spécialité mathématiques uniquement)**

**[5 points]**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x-1}$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. En remarquant que, pour tout réel  $x$  positif on a :  $x-1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ , montrer que :

$$f(x) = x+1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Même s'il n'a pas été établi, on pourra utiliser ce résultat dans la suite de l'exercice.

- 2. a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b. Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet en  $+\infty$  une équation oblique d'équation  $y = x+1$ .
  - c. Etudier la position de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à son asymptote.
3. a. Etudier la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers 1.
- b. Soit  $g$  la fonction définie par :

$$g(x) = f(x) \text{ pour } x \in [0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \text{ et } g(1) = a$$

Déterminer  $a$  pour que  $g$  soit continue en 1.

**Exercice 4bis (spécialité mathématiques uniquement)****[5 points]**

1.
  - a. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.
  - b. Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $2^{10}$  par 11.
  - c. Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $2^{2009} + 2009$  par 11.
2. On désigne par  $p$  un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul  $n$  le nombre  $A_n = 2^n + p$ .

On note  $d_n$  le PGCD de  $A_n$  et  $A_{n+1}$ .

- a. Montrer que  $d_n$  divise  $2^n$ .
- b. Déterminer la parité de  $A_n$  en fonction de celle de  $p$ . Justifier.
- c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la parité de  $d_n$  en fonction de celle de  $p$ .

En déduire le PGCD de  $2^{2009} + 2009$  et de  $2^{2010} + 2009$ .

---

**FIN DU SUJET**

---