

CORRIGE DU BB N°1 12/13 T°S

EXERCICE 1 : (4 points) commun à tous les élèves

Partie A :

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

k		0	1	2
U	0	$3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$	$3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$	$3 \times 10 - 2 \times 2 + 3 = 29$

la valeur affichée est : 29

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel

$$n : u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$$

1) $u_1 = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3, u_2 = 3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$

2)a) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n, u_n \geq n$.

Initialisation : $u_0 = 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier n tel que la propriété soit vraie, et l'on démontre que cette

propriété est vraie au rang $n + 1$

on suppose:

$$u_n \geq n; \text{ d'où } 3u_n \geq 3n, \text{ donc } 3u_n - 2n + 3 \geq 3n - 2n + 3, \text{ d'où: } u_{n+1} \geq n + 3 \geq n + 1$$

finalement : $u_{n+1} \geq n + 1$, la propriété est vraie au rang $n + 1$, on a montré par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n \geq n$;

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Comme, pour tout entier naturel $n, u_n \geq n$, par comparaison, on peut dire: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3$$

or, $u_n \geq n$ donc $u_n - n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0, (u_n)$ est croissante .

4) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par : $v_n = u_n - n + 1$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

$$\text{Pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3(u_n - n + 1)$$

donc: $v_{n+1} = 3v_n$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3

b) On a donc, pour tout entier naturel $n, v_n = v_0 \times 3^n = 1 \times 3^n$ donc, comme $u_n = v_n + n - 1$

$$u_n = 3^n + n - 1$$

5) Soit p un entier naturel non nul.

a) On sait que (u_n) tend vers $+\infty$, donc pour tout réel A donné, il existe n_0 tel que, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq A$, ici on a choisi $A = 10^p$, donc, si $n \geq n_0, u_n \geq 10^p$

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0 .

b) justifier que $n_0 \leq 3p$: calculons $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1$ or $p \geq 1$ donc $3p - 1 \geq 0$

donc: $u_{3p} \geq 27^p \geq 10^p$ car $27 \geq 10$, on aboutit à : $u_{3p} \geq 10^p$, or n_0 est le plus petit entier tel que $u_{n_0} \geq 10^p$ donc soit $n_0 = 3p$ soit n_0 est plus petit que $3p$ donc $n_0 \leq 3p$

c) $p = 3$ et d'après la question précédente $n_0 \leq 3p$ donc $n_0 \leq 9$
avec la calculette, on obtient $u_6 = 734$ et $u_7 = 2193$ donc $n_0 = 7$ ($u_6 < 1000$ et $u_7 \geq 1000$)

EXERCICE 2 : (5 points) non spécialité mathématiques

Partie A :

1) f est dérivable sur $[0; \pi]$ et $f'(x) = \frac{1}{2}((- \sin x) \sin x + (1 + \cos x) \cos x) = \frac{1}{2}(-\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x)$

$f'(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) = \frac{1}{2}(\cos x - 1 + 2\cos^2 x)$

Développons l'expression donnée dans l'énoncé:

$A = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(1 + \cos x) = \cos x - \frac{1}{2} + \cos^2 x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} + \cos^2 x$

On a bien : $f'(x) = A = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(1 + \cos x)$

2) Sur \mathbb{R} , $\cos x \geq -1$ donc : $1 + \cos x \geq 0$

Résolvons sur $[0; \pi]$: $\cos x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$;

Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$; alors : $\cos x \geq \frac{1}{2}$ donc $\cos x - \frac{1}{2} \geq 0$, de même, si $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$, $\cos x - \frac{1}{2} \leq 0$

3) $f'(x) < 0$ sur $\left] \frac{\pi}{3}; \pi \right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left] 0; \frac{\pi}{3} \right[$; de plus, f' s'annule en π et $\frac{\pi}{3}$

f est strictement croissante sur $\left] 0; \frac{\pi}{3} \right[$ et strictement décroissante sur $\left] \frac{\pi}{3}; \pi \right[$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
f'		+	0 -
f	0	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	0

Partie B :

1) Soit \mathcal{A} l'aire recherchée, $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AH \times HM = \frac{1}{2} \times (AO + OH) \times HM$

Or, $AO = R = 1$; $OH = OM \times \cos \widehat{MOH} = OM \cos(\widehat{MAH}) = 1 \times \cos 2t$, de même: $HM = OM \times \sin 2t$

Enfinement: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) \sin(2t)$

2) On constate que $\mathcal{A} = f(X)$ avec $X = 2t$, on a d'ailleurs bien $X \in [0; \pi]$

D'après la partie A, f atteint son maximum en $\frac{\pi}{3}$, donc $X = \frac{\pi}{3}$, donc $2t = \frac{\pi}{3}$, donc $t = \frac{\pi}{6}$

EXERCICE 2 : (5 points) spécialité mathématiques

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.

Dans la division euclidienne par 3, un entier peut admettre comme reste : 0, 1 ou 2.
Si ce reste est 0, alors l'entier est de la forme $3k$ et il admet 3 comme diviseur.
Le nombre premier p étant supérieur ou égal à 7, il est différent de 3. Comme il est premier, il ne peut donc admettre 3 comme diviseur. Ainsi, le reste de la division euclidienne de p par 3 est 1 ou 2.

Si ce reste vaut 1, on a $p = 3k + 1$ et il vient $p \equiv 1 (3)$. Si ce reste vaut 2, il vient $p \equiv 2 (3)$ et donc $p \equiv -1 (3)$.

Finalement :

L'entier p est congru à 1 ou à -1 modulo 3.

Si $p \equiv 1 (3)$ alors $p^4 \equiv 1^4 (3)$, soit $p^4 \equiv 1 (3)$ et, finalement : $p^4 - 1 \equiv 0 (3)$.

Si $p \equiv -1 (3)$ alors $p^4 \equiv (-1)^4 (3)$, soit $p^4 \equiv 1 (3)$ et, finalement : $p^4 - 1 \equiv 0 (3)$.

Dans tous les cas, on a : $p^4 - 1 \equiv 0 (3)$ et donc n est divisible par 3.

n est divisible par 3.

2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$, puis que n est divisible par 16.

L'entier p est premier supérieur ou égal à 7, il est donc impair, 2 étant le seul entier naturel premier pair.

Il existe donc un entier naturel k supérieur ou égal à 3 tel que $n = 2k + 1$.

Il vient alors : $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ et donc : $p^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$.

Par ailleurs : $p^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1)$.

On a alors :

$$n = p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = 4k(k + 1) \times 2(2k^2 + 2k + 1) = 8k(k + 1)(2k^2 + 2k + 1)$$

Or le produit $k(k + 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs. L'un d'eux est pair et il en va donc de même pour le produit. Ainsi, $8k(k + 1)$ est un multiple de 16 et il en va de même pour $n = p^4 - 1$.

n est divisible par 16.

3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n .

Dans la division euclidienne de p par 5, les restes possibles sont 1, 2, 3 et 4 (Nous excluons 0 puisque 5 ne divise pas un entier premier supérieur ou égal à 7).

Si le reste vaut :

- 1. On a $p \equiv 1 (5)$ et donc $p^4 \equiv 1^4 (5)$, soit $p^4 \equiv 1 (5)$. Finalement $p^4 - 1 \equiv 0 (5)$.
- 2. On a $p \equiv 2 (5)$ et donc $p^4 \equiv 2^4 (5)$, soit $p^4 \equiv 16 (5)$ d'où $p^4 \equiv 1 (5)$.
Finalement $p^4 - 1 \equiv 0 (5)$.
- 3. On a $p \equiv 3 (5)$ et donc $p^4 \equiv 3^4 (5)$, soit $p^4 \equiv 81 (5)$ d'où $p^4 \equiv 1 (5)$.
Finalement $p^4 - 1 \equiv 0 (5)$.
- 2. On a $p \equiv 4 (5)$ et donc $p^4 \equiv 4^4 (5)$, soit $p^4 \equiv 256 (5)$ d'où $p^4 \equiv 1 (5)$.
Finalement $p^4 - 1 \equiv 0 (5)$.

Dans tous les cas, on a $p^4 - 1 \equiv 0 (5)$ et on en déduit que 5 divise n .

n est divisible par 5.

4. Dédurre de ce qui précède que 240 divise n .

Remarque à l'attention du(de la) correcteur(trice) : le théorème de Gauss et ses corollaires n'ont pas encore été vus. La justification attendue ici repose donc sur la décomposition en facteur premiers de n .

D'après les résultats précédents, nous pouvons affirmer que les facteurs 2, 3 et 5 apparaissent dans la décomposition en facteurs premiers de n avec des exposants au moins égaux à 4, 1 et 1 respectivement. On peut donc écrire la décomposition en facteurs premiers de n comme suit :

$$n = 2^{4+\alpha_1} \times 3^{1+\alpha_2} \times 5^{1+\alpha_3} \times p_4^{\alpha_4} \times \dots \times p_m^{\alpha_m}$$

Avec : $2 < 3 < 5 < p_4 < \dots < p_m$ et pour tout i dans $\{1, 2, \dots, m\}$, α_i entier naturel (α_1 , α_2 et α_3 éventuellement nuls).

Il vient alors :

$$\begin{aligned} n &= 2^{4+\alpha_1} \times 3^{1+\alpha_2} \times 5^{1+\alpha_3} \times p_4^{\alpha_4} \times \dots \times p_m^{\alpha_m} \\ &= 2^4 \times 3 \times 5 \times (2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \times p_4^{\alpha_4} \times \dots \times p_m^{\alpha_m}) \\ &= 240 \times (2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \times p_4^{\alpha_4} \times \dots \times p_m^{\alpha_m}) \end{aligned}$$

L'entier n est un multiple de n .

n est divisible par 240.

5. Existe-t-il 15 nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_{15} supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

Nous considérons p_1, p_2, \dots, p_{15} 15 nombres premiers supérieurs ou égaux à 7.

Pour pouvoir exploiter le résultat précédent, nous écrivons :

$$\begin{aligned} A &= p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4 \\ &= (p_1^4 - 1) + 1 + (p_2^4 - 1) + 1 + \dots + (p_{15}^4 - 1) + 1 \\ &= (p_1^4 - 1) + (p_2^4 - 1) + \dots + (p_{15}^4 - 1) + 15 \end{aligned}$$

D'après le résultat obtenu à la question 4, nous pouvons écrire :

$$p_1^4 - 1 = 240q_1, \quad p_2^4 - 1 = 240q_2, \quad \dots, \quad p_{15}^4 - 1 = 240q_{15}$$

Où q_1, q_2, \dots, q_{15} sont des entiers naturels.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} A &= (p_1^4 - 1) + (p_2^4 - 1) + \dots + (p_{15}^4 - 1) + 15 \\ &= 240q_1 + 240q_2 + \dots + 240q_{15} + 15 \\ &= 15 \times 16 \times (q_1 + q_2 + \dots + q_{15}) + 15 \\ &= 15 \times [16 \times (q_1 + q_2 + \dots + q_{15}) + 1] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous p_1, p_2, \dots, p_{15} premiers supérieurs ou égaux à 7, le nombre A est un multiple de 15 et n'est donc pas premier.

Il n'existe pas 15 nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_{15} supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier.

EXERCICE 3 : (points) commun à tous les élèves

Partie A :

1) on cherche la probabilité de tirer une boule blanche suivie d'une boule noire ou l'inverse

$$p = p(N_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap N_2) = p(N_1) \times p(B_2) + p(B_1) \times p(N_2)$$

car les tirages successifs sont indépendants, $p = 2 \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = 0.42$

2) a) l'épreuve de Bernoulli est le jeu décrit précédemment: tirer successivement 2 boules avec remise, avec 2 issues, le succès étant avoir un tirage bicolore de probabilité $p = 0.42$

on répète n fois cette épreuve de manière identique et indépendante, X suit donc une loi binomiale de paramètres n et p

b) soit l'événement contraire: "le joueur ne gagne jamais" de probabilité $p' = (1 - 0.42)^n = 0.58^n$
d'où: $p_n = 1 - p' = 1 - 0.58^n$ donc $p_{10} = 1 - 0.58^{10} \approx 0.996$

3) on résout $p_n \geq 0.99 \Leftrightarrow 1 - 0.58^n \geq 0.99 \Leftrightarrow 0.01 \geq 0.58^n$, avec la calculette, le plus petit nombre n est 9, le joueur doit jouer au moins 9 parties

Partie B :

1) a) Gagner 5 € veut dire avoir un tirage bicolore, la probabilité est:

$$p = p(N_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap N_2) = p(N_1) \times p(B_2) + p(B_1) \times p(N_2) = 2 \times \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{k+3} = \frac{6k}{(k+3)^2}$$

b) Un tirage uniquement blanc rapporte -9€ et sa probabilité est: $\frac{3}{k+3} \times \frac{3}{k+3} = \frac{9}{(k+3)^2}$

Un tirage uniquement noir rapporte -1€ et sa probabilité est: $\frac{k}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{k^2}{(k+3)^2}$

$$\text{donc: } p(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}; p(Y_k = -9) = \frac{9}{(k+3)^2}; p(Y_k = -1) = \frac{k^2}{(k+3)^2};$$

$$2) E(Y_k) = 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} - 9 \times \frac{9}{(k+3)^2} - \frac{k^2}{(k+3)^2} = \frac{30k - 81 - k^2}{(k+3)^2}$$

Soit le trinôme $-k^2 + 30k - 81$, calculons $\Delta = 900 - 4 \times 81 = 576 = 24^2$, les racines du trinôme

sont: $\frac{-30 - 24}{-2} = 27$ et: $\frac{-30 + 24}{-2} = 3$, il faut donc que k soit strictement compris entre 3 et 27

pour que le jeu soit favorable au joueur

EXERCICE 4 : (6 points) commun à tous les élèves

1)a) Soit la fonction g définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que $g(x) = e^x - x$, alors $g'(x) = e^x - 1$
 $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$, de même $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$, g admet un minimum en $x = 0$
 et $g(0) = 1$ donc, pour tout x réel, $e^x - x \geq 1$, f est le quotient de deux fonctions définies sur \mathbb{R}
 et son dénominateur ne s'annule jamais, donc f est définie sur \mathbb{R}

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$; et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x = +\infty$; donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$$d'autre part, f(x) = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 - \frac{x}{e^x})} = \frac{1 - e^{-x}}{1 - \frac{x}{e^x}} \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$

c) f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$

2)a) sur \mathbb{R} , $\varphi(x) = 2e^x - xe^x - 1$, on sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$

b) φ est dérivable sur \mathbb{R} et $\varphi'(x) = -1 \times e^x + (2 - x)e^x = e^x(1 - x)$, $\varphi'(x)$ est donc du signe de $1 - x$
 φ est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
φ'		$+$	0 $-$
φ	-1	$e - 1$	$-\infty$

c) Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$, φ est strictement croissante et continue et d'intervalle image $]-1; e - 1[$
 contenant 0 donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α ;
 sur l'intervalle $]1; +\infty[$, φ est strictement décroissante et continue et d'intervalle image $]-\infty; e - 1[$
 contenant 0 donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β

d) avec la calculette: $-1.47 \leq \alpha \leq -1.46$ et $1.84 \leq \beta \leq 1.85$

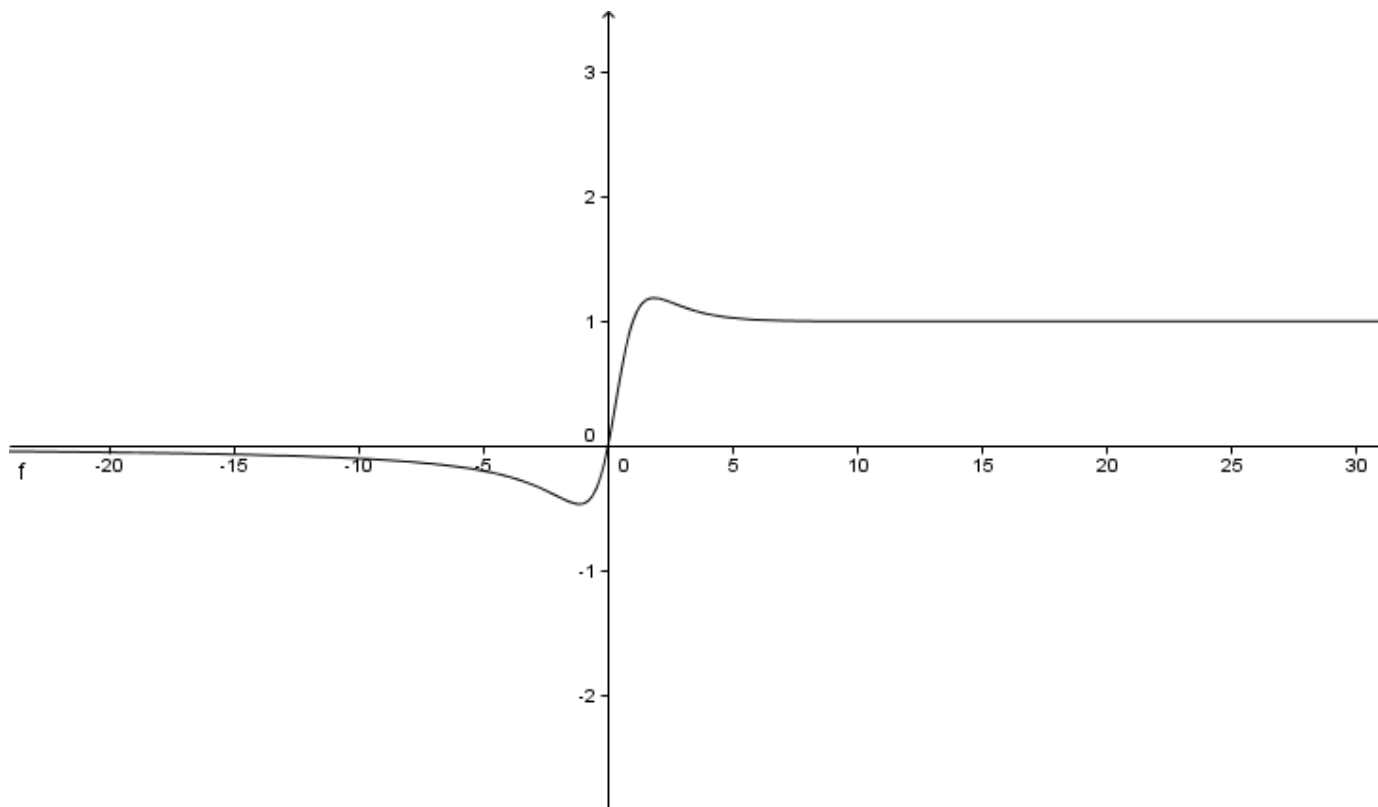
e) On sait que $\varphi(\alpha) = 0$ donc $(2 - \alpha)e^\alpha - 1 = 0$ donc $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$

3)a) On constate que $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x - x)^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$,

d'après les questions précédentes, on sait que $\varphi(x) \leq 0$ sur $]-\infty; \alpha]$ et $[\beta; +\infty[$ et que $\varphi(x) \geq 0$
 sur $[\alpha; \beta]$, donc f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et $[\beta; +\infty[$ et croissante sur $[\alpha; \beta]$

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
f'		-	0 +	0 -
f	0	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	1

$$b) f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha} = \frac{\frac{1}{2-\alpha} - 1}{\frac{1}{2-\alpha} - \alpha} = \frac{\frac{1-2+\alpha}{2-\alpha}}{\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}} = \frac{1-2+\alpha}{1-2\alpha+\alpha^2} = \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha-1}$$



+ tableau de valeurs