

T°S
BAC BLANC DE MATHÉMATIQUES N°1
DECEMBRE 2012
Durée : 4 heures
Calculatrices graphiques

EXERCICE 1 : (4 points) commun à tous les élèves

Partie A :

On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N .

Entrée

Saisir le nombre entier naturel non nul N .

Traitement

Affecter à U la valeur 0.

Pour k allant de 0 à $N - 1$

Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$

Fin pour

Sortie

Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. a) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.
b) En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n + 1$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?
On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0 .
b) Justifier que $n_0 \leq 3p$.
c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

EXERCICE 2 : (5 points) non spécialité mathématiques

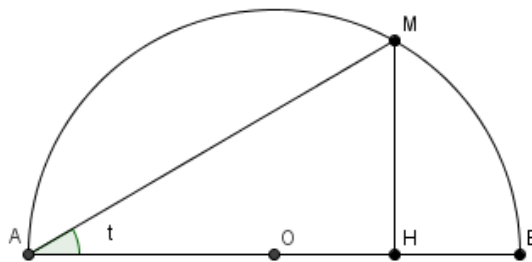
Partie A :

Soit la fonction f définie sur $[0;\pi]$ par $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos x)\sin x$.

1. Montrer que $f'(x) = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(1 + \cos x)$.
2. Etudier les signes de $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$ et de $(1 + \cos x)$ sur $[0;\pi]$.
3. En déduire le signe de $f'(x)$, puis les variations de f . Dresser le tableau de variations de f .

Partie B :

On considère la figure ci-dessous :



M appartient au demi-cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon 1.

H est le projeté orthogonal de M sur $[AB]$.

On note t la mesure en radians de l'angle $B\hat{A}M$ et on a donc : $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Rappel : Dans un cercle, si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.

1. Montrer que l'aire du triangle AHM est égale à : $\frac{1}{2}[1 + \cos(2t)] \times \sin(2t)$.
2. Déduire de la partie A, la valeur de t pour laquelle cette aire est maximale.

EXERCICE 2 : (5 points) spécialité mathématiques

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$, puis que n est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n .
4. Déduire de ce qui précède que 240 divise n .
5. Existe-t-il 15 nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_{15} supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

EXERCICE 3 : (5 points) commun à tous les élèves

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.

Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.
Démontrer que $p = 0,42$.
2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes. On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
 - a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p .
 - b. Exprimer p_n en fonction de n , puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.
 - c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1.
 - a. Justifier l'égalité : $p(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.
 - b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k
2. On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k
On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.
Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

EXERCICE 4 : (6 points) commun à tous les élèves

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

1. a) Démontrer que pour tout réel x , $e^x - x \geq 1$.

Justifier alors que f est définie sur \mathbb{R} .

- b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- c) Calculer $f'(x)$.

2. Etude du signe d'une fonction auxiliaire φ :

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = (2 - x)e^x - 1$.

- a) Etudier les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

- b) Etudier le sens de variation de φ et dresser son tableau de variations (limites comprises).

- c) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions que l'on nommera α et β (avec $\alpha < \beta$).

- d) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} . Faire de même avec β .

- e) Montrer que $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$.

3. a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

- c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$.

4. Tracer dans un repère du plan la courbe représentative de f après avoir donné un tableau de valeurs.