BB1 T°S 2013/2014 CORRIGE

Exercice 1.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$

Partie A.

1. L'algorithme qui permet d'afficher tous les termes du rang 0 au rang n est l'algorithme n°3.
En effet, c'est le seul qui prévoit l'affichage de n+1 termes. Le premier affiche un seul terme (le dernier calculé) ; le second affiche n fois la valeur 1 : cet algorithme ne permet pas le calcul des termes de la suite.

2. En observant les 10 premiers termes, on peut conjecturer que la suite (v_n) est croissante. Avec les termes de rang 90 à 99, on peut de plus conjecturer que la suite est convergente et que sa limite est proche de 2,970 (ou inférieure à 3).

3. a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
Notons cette propriété (P_n).
$v_0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.
On suppose que la propriété est vraie à un rang n donné, montrons qu'elle est vrai au rang n+1.

$$\begin{aligned} 0 < v_n < 3 &\Leftrightarrow 3 < 6 - v_n < 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{6-v_n} > \frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < \frac{9}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2} < v_{n+1} < 3 \\ &\Rightarrow 0 < v_{n+1} < 3 \end{aligned}$$ donc la propriété (P_n) est héréditaire.

Nous avons montré que la propriété (P_n) est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

b) Pour tout entier naturel n, on a :
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{9}{6-v_n} - v_n \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{9}{6-v_n} - \frac{6v_n - v_n^2}{6-v_n} \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6-v_n} \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{(3-v_n)^2}{6-v_n} \end{aligned}$$

Étudions le signe de $v_{n+1} - v_n$:
Le numérateur de $\dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$ étant positif, ce quotient est du signe du dénominateur ; or, on sait que $0 < v_n < 3$ donc $6 - v_n > 0$. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n > 0$; donc la suite (v_n) est croissante.

c) On a montré successivement que la suite (v_n) est majorée par 3 et croissante. Or, toute suite croissante et majorée converge donc la suite (v_n) est convergente.

Partie B.

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$

1. Montrons que la suite (w_n) est arithmétique :
Pour tout entier naturel n, on a :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1} - 3} - \frac{1}{v_n - 3}$$
$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\frac{9}{6 - v_n} - 3} - \frac{1}{v_n - 3}$$
$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\frac{9 - 18 + 3v_n}{6 - v_n}} - \frac{1}{v_n - 3}$$
$$w_{n+1} - w_n = \frac{6 - v_n}{-9 + 3v_n} - \frac{1}{v_n - 3}$$
$$w_{n+1} - w_n = \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)} - \frac{3}{3(v_n - 3)}$$
$$w_{n+1} - w_n = \frac{3 - v_n}{3(v_n - 3)}$$

$w_{n+1} - w_n = \frac{-1}{3}$ donc la suite (w_n) est arithmétique de raison $\frac{-1}{3}$.

2. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 - \frac{1}{3}n$ où $w_0 = \frac{1}{1-2} = \frac{-1}{2}$;

Donc on peut écrire, pour tout entier naturel n, que $w_n = \frac{-1}{2} - \frac{1}{3}n$; par ailleurs, $v_n = \frac{1}{w_n} + 3$.

On obtient donc :

$$v_n = \frac{1}{\frac{-1}{2} - \frac{1}{3}n} + 3$$
$$v_n = \frac{6}{-3 - 2n} + 3$$

3. Étudions la limite de la suite (v_n) :
$\lim (-3 - 2n) = -\infty$

par inverse, $\lim \frac{6}{-3 - 2n} = 0$ et par somme : $\lim \frac{6}{-3 - 2n} + 3 = 3$

C'est-à-dire que $\lim v_n = 3$.

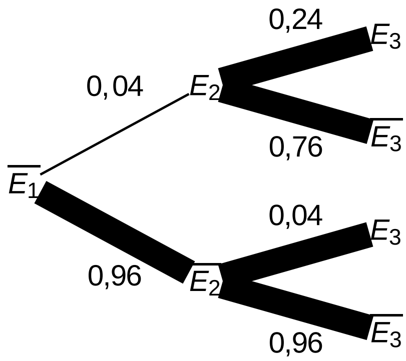
Barème :

Partie A. (3 points)
1. 0,5
2. 0,25
3. a) 1
   b) 0,5 + 0,5
   c) 0,25

Partie B. (2 points)
1. 0,75
2. 0,25 + 0,5
3. 0,25

EXERCICE 2 :

1. a)



$E_2 \cap E_3$ et $\overline{E_2} \cap E_3$ forment une partition de E_3.
En appliquant donc la formule des probabilités totales, on obtient :
$p_3 = p(E_3) = p(E_2 \cap E_3) + p(\overline{E_2} \cap E_3)$,
d'où : $p_3 = \ p(E_2) \times p_{E_2}(E_3) + p(\overline{E_2}) \times p_{\overline{E_2}}(E_3)$
soit : $p_3 = 0{,}04 \times 0{,}24 + 0{,}96 \times 0{,}04$

$\boxed{p_3 = 0{,}048}$

Conclusion : **la probabilité que le salarié soit absent pour cause de maladie la troisième semaine est de 0,048.**

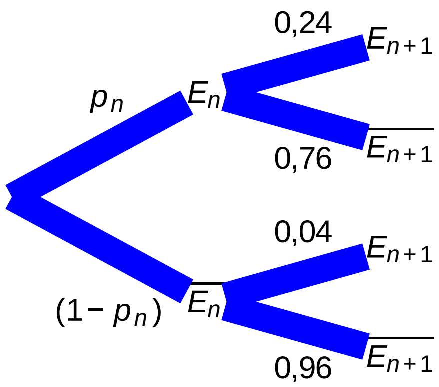
b) Il s'agit ici de calculer $p_{E_3}(E_2)$.

$$p_{E_3}(E_2) = \frac{p(E_2 \cap E_3)}{p(E_3)} = \frac{p(E_2) \times p_{E_2}(E_3)}{p(E_3)} = \frac{0{,}04 \times 0{,}24}{0{,}048}$$

$\boxed{p_{E_3}(E_2) = 0{,}2.}$

Conclusion : **la probabilité que le salarié soit absent pour cause de maladie la troisième semaine sachant qu'il l'a été la deuxième semaine est de 0,2.**

2. a) Complétons l'arbre :



b) $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ forment une partition de E_{n+1}.
En appliquant donc la formule des probabilités totales, on obtient :
$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$,
d'où : $p_{n+1} = \ p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$
soit : $p_{n+1} = p_n \times 0{,}24 + (1 - p_n) \times 0{,}04$

$\boxed{\textbf{d'où : } \boldsymbol{p_{n+1} = 0,2p_n + 0,05}}$

c) Pour tout entier $n \geq 1$,
$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}05 = 0{,}2p_n + 0{,}04 - 0{,}05 = 0{,}2p_n - 0{,}01 = 0{,}2(p_n - 0{,}05)$

d'où $\underline{u_{n+1} = 0{,}2u_n}$.

De plus, sachant que $u_n = p_n - 0{,}05$, on a : $\underline{u_1 = p_1 - 0{,}05 = 0 - 0{,}05 = -0{,}05}$.

Conclusion : **Donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et de raison r =0,2.**

D'où pour tout entier $n \geq 1$,
$u_n = u_1 \times r^{n-1}$ soit :

$$\boxed{u_n = -0,05 \times 0,2^{n-1}}$$

Comme $u_n = p_n - 0{,}05$, il vient : $p_n = u_n + 0{,}05$, soit :

$$\boxed{p_n = -0,05 \times 0,2^{n-1} + 0,05}$$

d) (u_n) est une suite géométrique de raison r =0,2 telle que
$-1 \leq r \leq 1$.
Donc la suite (u_n) converge vers 0, et par somme on peut affirmer que la suite (p_n) converge et que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,05.}$$

3. a) On peut assimiler l'expérience à 20 épreuves **successives** (contrôle de la présence ou non de chacun des 20 salariés), **indépendantes** (la santé d'un salarié n' a pas d'influence sur celle de ses collègues)et à **deux issues** (absent ou pas la semaine n donnée).

Il s'agit donc d'un processus de Bernoulli et la variable aléatoire X suit donc un loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,05$.

b) Et on a pour tout entier naturel $k \leq 20$: $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Donc $p(X = 3) = \binom{20}{3} 0,05^3 0,95^{17} \approx 0,06$.

c) Soit A l'événement : « Au moins un salarié de l'équipe est malade une semaine donnée ».
A = "$X \geq 1$"
Donc $\overline{\mathrm{A}}$ = "$X = 0$" : « aucun salarié n'est malade cette semaine »
D'où $p(\mathrm{A}) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$$\boxed{p(\mathrm{A}) = 1 - \binom{20}{0} 0,05^0 0,95^{20} \approx 0,64\,.}$$

d) Par propriété, l'espérance $E(X)$ d'une loi binomiale est donné par la formule :
$E(X) = np$.

Ici $E(X) = 20 \times 0,05$=1.

Ce qui signifie qu'en moyenne un salarié sur les 20 est absent une semaine donnée.

e) Par propriété, l'écart-type σ d'une loi binomiale est donné par la formule :
$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Ici : $\sigma = \sqrt{20 \times 0,05(1 - 0,05)} \approx 0,975$.

Barème :

1. **a) 0,5**
   b) 0,25
2. **a) 0,25**
   b) 0,5
   c) 0,5+0,25+0,25
   d) 0,25
3. **a) 0,5**
   b) 0,25
   c) 0,75
   d) 0,5
   e) 0,25

Exercice 3.

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire
On considère la fonction g définie sur [0 ; 2π] par $g(x)=x\cos(x)-\sin(x)$

1. Étudions les variations de la fonction g
g est le produit et la somme de fonctions dérivables sur [0 ; 2π] donc g est dérivable sur [0 ; 2π] et

$$g'(x)=\cos(x)-xsin(x)-\cos(x)$$
$$g'(x)=-x\sin(x)$$

Étudions le signe de *g'(x)* dans un tableau :

x	*0*	*π*	*2π*
- x	−		−
sin x	+		−
g'(x)	−		+

2. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur [0 ; π] et strictement croissante sur [π ; 2π]. Or g(0) = 0 ; g(π) = -π et g(2π) = 2π ; on obtient le tableau de variations suivant :

x	*0*		*π*		*2π*
g	*0*	↘	*- π*	↗	*2π*

3. g étant dérivable sur [0 ; 2π], g est dérivable et continue sur [π ; 2π].
De plus, g est strictement croissante sur [π ; 2π] et 0 ∈ [-π ; 2π] ; donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation *g(x) = 0* admet une unique solution α dans [π ; 2π].

4. D'après le tableau de valeurs de la calculatrice, on obtient que :
$$4{,}493 < \alpha < 4{,}494$$
En effet, g(4,493) < 0 et g(4,494) >0.

5. On peut en déduire que la fonction g est négative ou nulle sur [0 ; α] et positive ou nulle sur [α ; 2π]. Elle est nulle en 0 et α et non nulle ailleurs.

Partie B. Étude de la fonction *f*.

Soit *f* la fonction définie sur [0 ; 2π] par : $f : x \rightarrow \begin{cases} 1 \; si \; x=0 \\ \dfrac{\sin x}{x} \; si \; x\in[0\,;2\pi] \end{cases}$

1. Étudions la continuité de la fonction *f* sur son ensemble de définition.
Sur]0 ; 2π], la fonction *f* est le quotient de 2 fonctions continues sur]0 ; 2π] et dont le dénominateur ne s'annule pas ; *f* est donc continue sur]0 ; 2π].
Étudions la continuité de *f* en 0.

$\lim \dfrac{\sin x}{x}=1$ d'après un théorème (dérivabilité de la fonction sinus en 0)

Donc on a, lorsque x tend vers 0 : $\lim \frac{\sin x}{x} = f(0)$

On en déduit que la fonction *f* est continue en 0 ; étant également continue sur]0 ; 2π], on peut dire que la fonction *f* est continue sur [0 ; 2π].

2. Étudions les variations de f sur [0 ; 2π] :
f est dérivable sur]0 ; 2π] comme le quotient de deux fonctions dérivables sur]0 ; 2π] et

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

On en déduit que le signe de *f'(x)* est le même que le signe de *g(x)*.

D'après la question A5, f'(x) est donc négative sur [0 ; α] et positive sur [α ; 2π]. On peut donc dire que *f* est décroissante sur [0 ; α] et croissante sur [α ; 2π].

3. *f* admet donc un minimum en α pour lequel g(α) = 0.

Or : $$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \alpha\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha\cos(\alpha) = \sin(\alpha) \\ &\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \end{aligned}$$

Par ailleurs, $f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$; on a donc $f(\alpha) = \cos\alpha$

4. Pour étudier la dérivabilité de la fonction *f* en 0, nous allons étudier la limite du quotient $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Or, $$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x}$$
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$$

D'après l'inégalité donnée dans l'énoncée : pour tout réel x positif,

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x &\Leftrightarrow -\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{x}{6} \leq \frac{sinx - x}{x^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Or $\lim \frac{-x}{6} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement des limites), $\lim \frac{sinx - x}{x^2} = 0$

D'où, cette limite existant et étant finie, la fonction *f* est dérivable en 0 et son nombre dérivé vaut 0.
f'(0) = 0

Barème :
Partie A : 1. 0,5 / 2. 0,25 / 3. 0,75 / 4. 0,25 / 5. 0,25 soit 2 points
Partie B : chaque question : 0,75 soit 3 points

<u>EXERCICE 4</u> (5 points)
Candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité uniquement.

1. a. A l'aide du graphique, on lit :$f'(0) = 3, f'(1) = 0, f'(2) = -1, f'(3) = 0, f'(4) = 3$, le tableau de signes de $f'(x)$ est le suivant :

x	-1		1		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. On en déduit les variations de f sur l'intervalle $[-1;5]$. :

la fonction f est strictement croissante sur $[-1;1]$ et sur $[3;5]$; elle est strictement décroissante sur
$[1;3]$

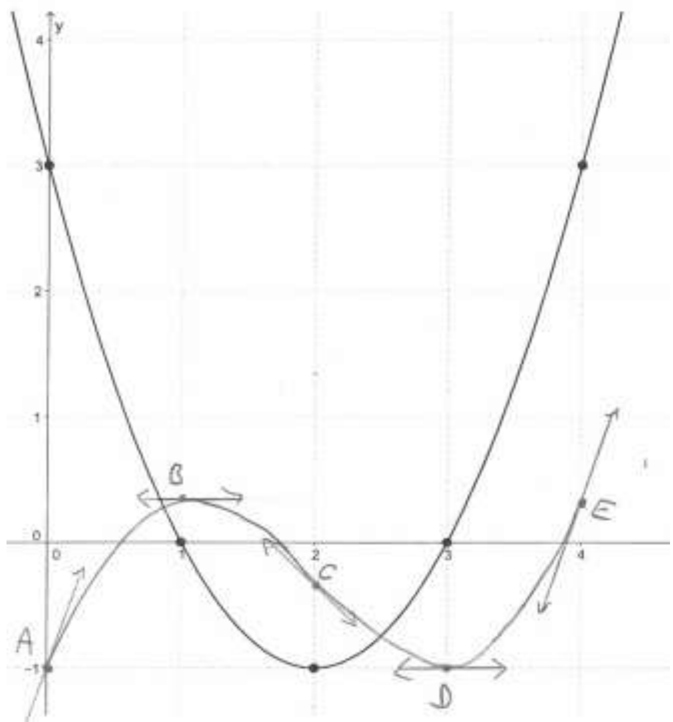
2. On veut tracer une représentation graphique $\mathscr{C}$ possible de la fonction f.

On sait que : $f(0)=-1,\ f(1)=\frac{1}{3},\ f(2)=-\frac{1}{3},\ f(3)=-1$ et $f(4)=\frac{1}{3}$.

a. On place dans le repère (O, I, J) les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses 0, 1, 2, 3 et 4 nommés respectivement : A,B,C,D et E

b. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation :
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$
Par exemple, si T_A est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, on a :$T_A: y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
D'où : $T_A: y = 3x - 1$, de même :$T_B: y = \frac{1}{3}$; $T_C: y = -x + \frac{5}{3}$; $T_D: y = -1$; $T_E: y = 3x - \frac{35}{3}$

c. Tracé possible de la courbe $\mathscr{C}$.



3. On veut déterminer l'expression de $f(x)$.

On suppose que pour tout réel x, on a : $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+c$

Sur $[-1;5], f'(x)=x^2+2ax+b,$ on sait que: $f'(0)=3, f'(1)=0, f(0)=-1$

D'où le système : $\begin{cases} b=3 \\ 1+2a+b=0 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=+3 \\ c=-1 \end{cases}$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$

4. Grâce à la calculette ou à un tableau de variation de f, on trouve que l'équation $f(x)=k$ a :

●aucune solution si $k \in \left]-\infty;-\frac{19}{3}\right[\cup \left]\frac{17}{3};+\infty\right[$

●une solution si $k \in \left[-\frac{19}{3};-1\right[\cup \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

●2 solutions si $k=-1$ *ou* $k=\frac{1}{3}$

●3 solutions si $k \in \left]-1;\frac{1}{3}\right[$

5. Etant donné que la dérivée d'une constante est égale à 0, on peut choisir une fonction g, définie sur $[-1;5]$ par $g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1+\text{constante}$, par exemple:

$g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+20$

---

1)a)0.75
b)0.25
2)a)0.25
b) 1
c)0.25
3)1
4)1
5)0.5