Toute calculatrice autorisée.
Le sujet comporte un total de 5 exercices.

Les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité traiteront les exercices 1, 2, 3 et 4.
Les élèves suivant l'enseignement de spécialité traiteront les exercices 1, 2, 3 et 5.

ATTENTION ! **Le sujet doit être rendu avec la copie !**
NOM et prénom :

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats.

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

Partie A.

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N°1	Algorithme N°2	Algorithme N°3

Variables
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
 	
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
 	
Pour i variant de 1 à n faire
    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
 	
Fin algorithme
	Variables
	v est un réel
	i et n sont des entiers naturels
	
	Début de l'algorithme :
	Lire n
	Pour i variant de 1 à n faire
	    v prend la valeur 1
	    Afficher v
	    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
	Fin pour
	
	Fin algorithme
		Variables
		V est un réel
		i et n sont des entiers naturels
		
		Début de l'algorithme :
		Lire n
		v prend la valeur 1
		
		Pour i variant de 1 à n faire
		    Afficher v
		    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
		Fin pour
		Afficher v
		Fin algorithme

2. Pour $n = 9$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 99$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* : $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel *n* : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B. Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel *n* par :

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

2. En déduire l'expression de w_n puis celle de v_n en fonction de *n*.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

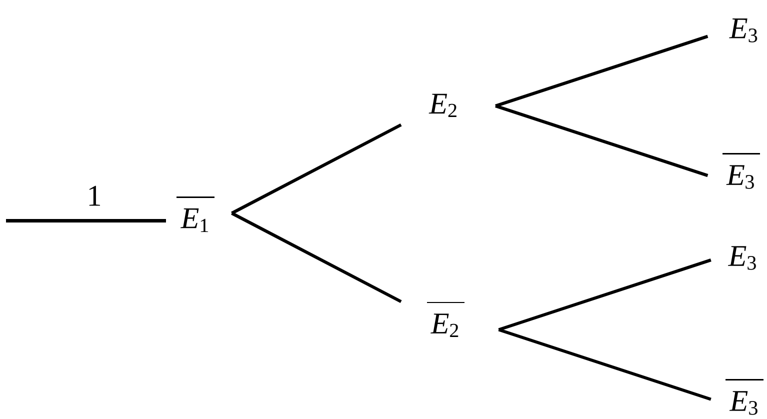
EXERCICE 2 (5 points)
Commun à tous les candidats.

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine *n* le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

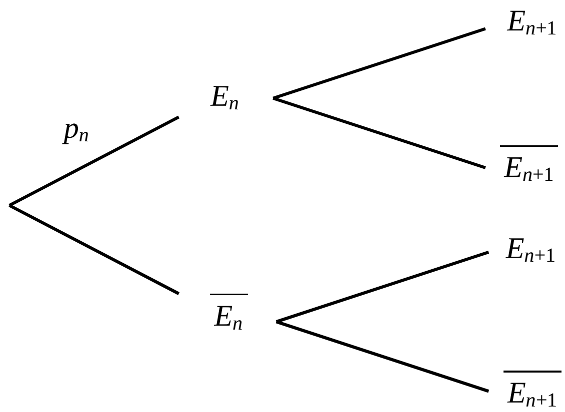
On désigne, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement : « le salarié est absent pour cause de maladie la *n*-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n.
On a ainsi $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 en vous aidant de l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous.



b. Montrer que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, on a :
$p_{n+1} = 0,2\,p_n + 0,04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison *r*.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de *n* et de *r*.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

3. On s'intéresse à une équipe de 20 salariés de cette entreprise. Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'un salarié de l'équipe soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié de l'équipe ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés de l'équipe malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. En donner les paramètres.

b. Calculer $p(\mathrm{X} = 3)$ et donner une interprétation du résultat obtenu.

c. Calculer la probabilité qu'au moins un salarié de l'équipe soit malade une semaine donnée.

d. Calculer l'espérance de X et donner une interprétation du résultat obtenu.

e. Calculer l'écart type de X.

<u>EXERCICE 3</u> (5 points)
Commun à tous les candidats.

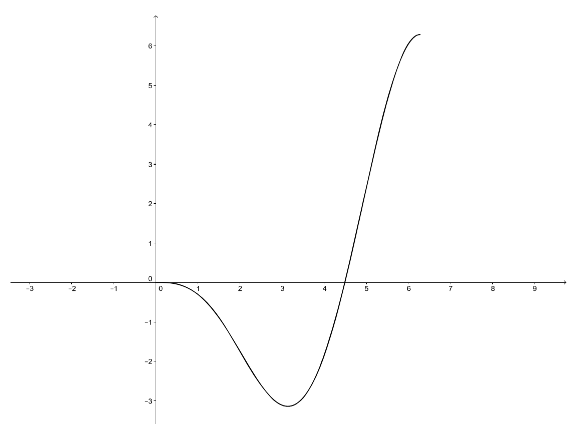
On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \left]0\,;2\pi\right] \end{cases}$$

Partie A. Etude d'une fonction auxiliaire.

On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ par :

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$$



1. **1.** Etudier les variations de la fonction *g* sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
2. **2.** Construire le tableau de variation de la fonction *g*.
3. **3.** Démontrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $[\pi\,;2\pi]$ tel que $g(x) = 0$.
4. **4.** Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
5. **5.** Donner le signe de la fonction *g* sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

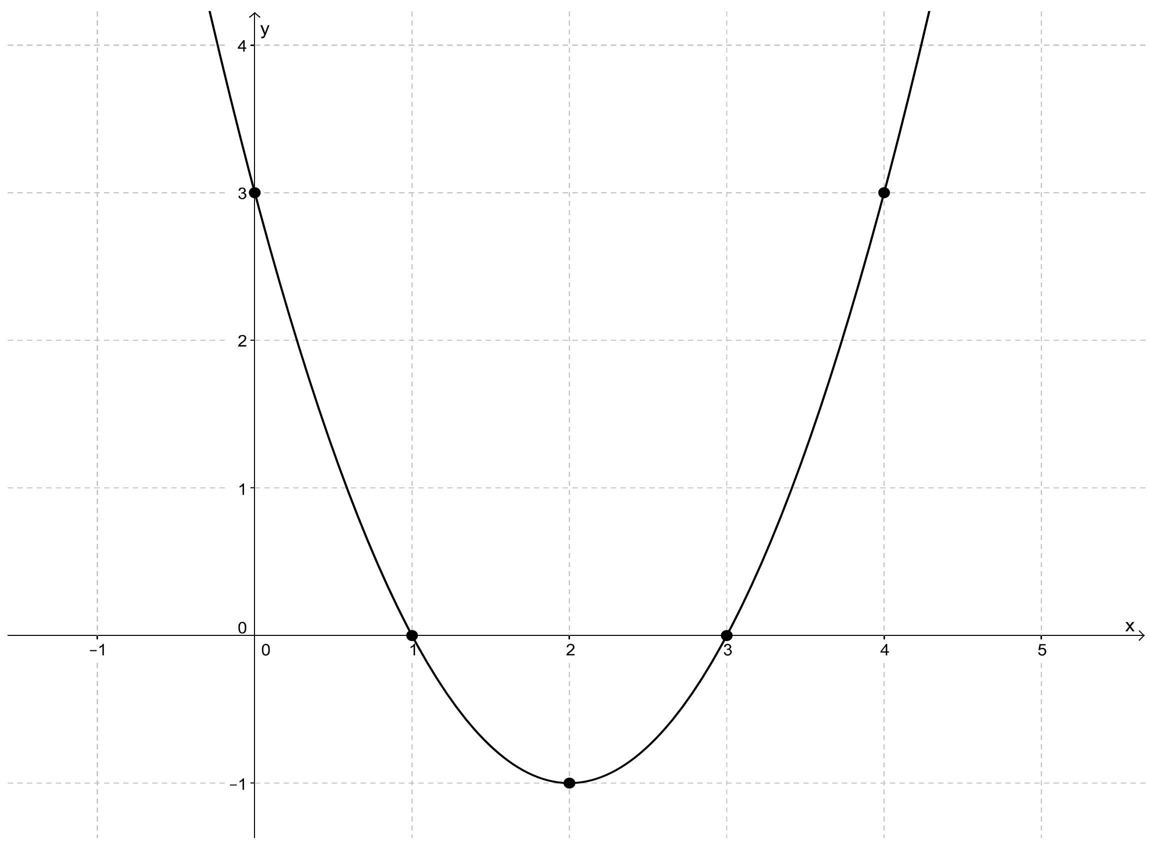
Partie B. Etude de la fonction *f*

1. **1.** Démontrer que la fonction *f* est continue sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
2. **2.** Etudier les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
3. **3.** Justifier que la fonction *f* admet un minimum en $x = \alpha$ et montrer que $f(\alpha) = \cos\alpha$.
4. **4.** On admet que pour tout réel *x* positif, on a : $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

   Etudier la dérivabilité de *f* en 0.

EXERCICE 4 (5 points)
Candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité uniquement.

Soit une fonction *f* définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;5]$ et sa fonction dérivée f', dont la courbe représentative dans le repère (O, I, J) est tracée ci-dessous.



ATTENTION !
Dans la suite de l'exercice, vous devrez compléter ce graphe.
Ainsi, n'oubliez pas de mentionner votre nom et votre prénom sur la première page de votre sujet et de le joindre à votre copie.

1. **a.** A l'aide du graphique, déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-1\,;5]$.

2. On veut tracer une représentation graphique $\mathscr{C}$ possible de la fonction f.

On sait que : $f(0)=-1$, $f(1)=\frac{1}{3}$, $f(2)=-\frac{1}{3}$, $f(3)=-1$ et $f(4)=\frac{1}{3}$.

a. Placer dans le repère (O, I, J) les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses 0, 1, 2, 3 et 4.

b. Déterminer, en justifiant, les équations réduites des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0, 1, 2, 3 et 4 puis les tracer.

c. Proposer un tracé de la courbe $\mathscr{C}$.

3. On veut déterminer l'expression de $f(x)$.

On suppose que pour tout réel x, on a :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+c$$

Déterminer les valeurs de a, b et c et donner l'expression de $f(x)$.

4. Donner, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ (aucune justification n'est demandée).

5. Existe-t-il d'autres fonctions admettant la fonction f' pour dérivée sur l'intervalle $[-1\,;5]$ (on fournira une réponse argumentée) ? Si oui, donner une telle fonction.

EXERCICE 5 (5 points)
Candidat suivant l'enseignement de spécialité uniquement

1. **a.** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

b. Démontrer alors que $2005^{2005} \equiv 7\,(9)$.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $10^n \equiv 1\,(9)$.

b. On désigne par N un entier naturel écrit en base 10, on appelle S la somme de ses chiffres.
Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\,(9)$.

c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = 2005^{2005}$; on désigne par :

- B la somme des chiffres de A ;
- C la somme des chiffres de B ;
- D la somme des chiffres de C.

a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\,(9)$.

b. Sachant que $2005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numérotation décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que $B \leq 72\,180$.

c. Démontrer que $C \leq 45$.

d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e. Démontrer que $D = 7$.

Fin du sujet