BB1 TS 1516 CORRIGE

Exercice 1 : (5 points)

1. a) **0,25**

$$\lim_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

Par somme

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty}$$

b) **0,25** f_1 est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\geq 0$,

$$\boxed{f_1'(x)=2+\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

c) **0,5** Pour tout ≥ 0, $f_1'(x)>0$, d'où f_1 est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Ce qui donne le tableau de variation :

x	0		$+\infty$
f_1	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) **0,5**

$$\lim_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{n}=+\infty$$

Par somme

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty}$$

b) **0,25+0,25** f_n est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\geq 0$,

$$\boxed{f_n'(x)=2+\frac{1}{2n\sqrt{x}}}$$

Pour tout de $[0;+\infty[$, $2>0, n>0$, donc $f_n'(x)>0$,
d'où **f_n est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.**

c) **0,75** f_n est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
De plus,

$$f_n(0)=-2$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$$

Or $0\in[-2;+\infty[$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones,

l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $[0;+\infty[$.

d) **0,25** $f_n(0)=-2$ et $f_n(1)=\frac{1}{n}$.
Or $0\in\left[-2;\frac{1}{n}\right[$.
D'où **$0<\alpha_n<1$.**

3. **0,75** On sait que pour tout n entier naturel non nul, $f_n(\alpha_n)=0$.
D'où en particulier

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0 \Leftrightarrow 2\alpha_{n+1}-2+\frac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n+1}=0 \Leftrightarrow (-2\alpha_{n+1}+2)(n+1)=\sqrt{\alpha_{n+1}}$$

Or

$$f_n(\alpha_{n+1})=2\alpha_{n+1}-2+\frac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n}$$

d'où

$$f_n(\alpha_{n+1})=2\alpha_{n+1}-2+\frac{(-2\alpha_{n+1}+2)(n+1)}{n}$$

soit

$$f_n(\alpha_{n+1}) = \frac{-2\alpha_{n+1} + 2}{n} = \frac{2(1-\alpha_{n+1})}{n}$$

Or pour tout n entier naturel non nul, $0 < \alpha_n < 1$, donc en particulier $\alpha_{n+1} < 1$.
Il en découle immédiatement que $1 - \alpha_{n+1} > 0$ puis que

$$\frac{2(1-\alpha_{n+1})}{n} > 0$$

soit $\boxed{f_n(\alpha_{n+1}) > 0.}$

4. a) **0,5** On sait que :
   - $f_n(\alpha_n) = 0$
   - $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

   donc $f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$
   Or f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, et comme les images et les antécédents sont rangés dans la même ordre, on a nécessairement :

$$\boxed{\alpha_{n+1} > \alpha_n}$$

D'où la suite (α_n) est strictement croissante.

b) **0,25**La suite (α_n) est croissante et majorée par 1 $(0 < \alpha_n < 1)$, donc elle est convergente.

c) **0,5**On sait que

$$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_n - 2 + \frac{\sqrt{\alpha_n}}{n} = 0 \Leftrightarrow \alpha_n = 1 - \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2n}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

$0 < \alpha_n < 1$ donc $0 < \sqrt{\alpha_n} < 1$ (stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$)
d'où, comme $2n > 0$, en divisant par $2n$ les membres des inégalités, il vient :

$$\frac{0}{2n} < \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2n} < \frac{1}{2n} \Leftrightarrow 0 < \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2n} < \frac{1}{2n}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

D'où, d'après le théorème des gendarmes,

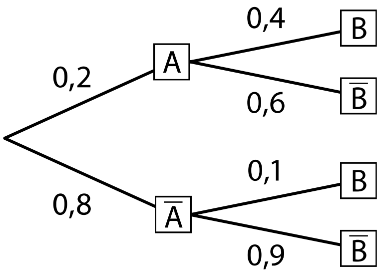
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2n} = 0$$

Enfin par somme,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1}$$

Exercice 2 : **(3 points)**

1. **0,5**



2. a) **0,5** « La personne contactée s'abonne à la version papier et à la version électronique » est l'événement $A \cap B$.

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$$

La probabilité que la personne contactée s'abonne à la version papier et à la version électronique est donc de 0,08.

b) **0,75** Les événements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de B.
Donc en appliquant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) = 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}8 \times 0{,}1$$

d'où

$$p(B) = 0{,}16$$

c) **0,75** Pour vérifier si A et B sont indépendants, comparons $p(A \cap B)$ à $p(A) \times p(B)$.

$$p(A \cap B) = 0{,}08$$
$$p(A) \times p(B) = 0{,}2 \times 0{,}16 = 0{,}32$$

On remarque que

$$p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$$

Donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

On aurait pu aussi remarquer que $p_A(B)(= 0{,}4) \neq p(B)(= 0{,}16)$

3. **0,5** « La personne contactée est abonnée à la version papier sachant qu'elle est abonnée à la version électronique » est l'événement A sachant B.

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0{,}08}{0{,}16}$$

$$p_B(A) = 0{,}5$$

Si la personne contactée est abonnée à la version électronique, elle a une chance sur deux d'être aussi abonnée à la version papier.

Exercice 3. **(3 points)**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + 3\cos x$ et C_g sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Soit T la tangente à C_g au point d'abscisse 0 et T' la droite d'équation $y = -x - 3$

1. Montrons que pour tout réel x, T' est en dessous de Cg et Cg en dessous de T

¤ Déterminons l'équation réduite de T : **0,5 pt**

G est la somme et le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = -1 - 3\sin x$$

On en déduit que $g'(0) = -1 - 3 \times 0 = -1$

Par ailleurs, $g(0) = 3$ donc l'équation réduite de T est : $y = -1(x - 0) + 3$ soit $\boldsymbol{y = -x + 3}$

¤ Pour tout réel x, on a :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad donc \quad -x - 3 \leq -x - 3\cos x \leq -x + 3$$

$$-x - 3 \leq g(x) \leq -x + 3$$

On a donc la droite *T'* en dessous de C_g et la courbe C_g en dessous de la droite *T*. **0,5 pt**

2. Montrons que T est tangente à C_g en une infinité de points :

¤ Déterminons les points communs à T et C_g

$$g(x) = -x + 3 \Leftrightarrow -x + 3\cos x = -x + 3$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0\ [2\pi] \qquad \text{ou } x = 2k\pi \quad pour\ k \in \mathbb{Z}$$

Les points communs à T et C_g sont les points de coordonnées $(2k\pi\ ;\ -2k\pi + 3)$ $pour\ k \in \mathbb{Z}$ **0,5 pt**

¤ Vérifions qu'en ces points, T est tangente à C_g, c'est-à-dire que le nombre dérivé de g en ces points est bien égal au coefficient directeur de T, soit -1 :

$$g'(2k\pi) = -1 - 3\sin(2k\pi) = -1$$

Donc T est tangente à C_g en une infinité de points de coordonnées $(2k\pi\ ;\ -2k\pi + 3)$. **0,5 pt**

3. Montrons que T' est tangente à C_g en une infinité de points :

¤ De même que pour la question 2, il s'agît de résoudre : **0,5 pt**

$$g(x) = -x - 3 \Leftrightarrow -x - 3\cos x = -x - 3$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pi\ [2\pi] \qquad \text{ou } x = \pi + 2k\pi \quad pour\ k \in \mathbb{Z}$$

Les points communs à T' et C_g sont les points de coordonnées $(\pi + 2k\pi\ ;\ -(\pi + 2k\pi) + 3)$ $pour\ k \in \mathbb{Z}$

¤ Vérifions qu'en ces points, T' est tangente à C_g, c'est-à-dire que le nombre dérivé de g en ces points est bien égal au coefficient directeur de T, soit -1 :

$$g'(2k\pi) = -1 - 3\sin(\pi + 2k\pi) = -1$$

Donc T' est tangente à C_g en une infinité de points de coordonnées $(\pi + 2k\pi\ ;\ -(\pi + 2k\pi) + 3)$ $pour\ k \in \mathbb{Z}$.

0,5 pt

Exercice 4 (5p)

1. $\begin{cases} d_1 &= \frac{1}{2}d_0 + 100 = 250 \\ a_1 &= \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = 445 \end{cases}$

2. a. On obtient en sortie $D = 250$ et $A = 420$. Ces résultats ne sont pas cohérents avec ceux obtenus à la question (1).

b. Le problème de l'algorithme proposé est qu'il réutilise la variable D pour le calcul de A alors qu'elle a été modifiée. On corrige cela en utilisant une variable auxiliaire E, déclarée « nombre réel » dans l'initialisation :

Variables :	n et k sont des entiers naturels
	D, A et E sont des réels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	D prend la valeur 300
	A prend la valeur 450
	Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	E prend la valeur D
	D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$
	A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{E}{2} + 70$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher D
	Afficher A

3. a. Par définition, on a :

$$e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n - 100 = \frac{1}{2}(d_n - 200) = \frac{1}{2}e_n$$

La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $e_0 = d_0 - 200 = 100$.

b. D'après la question précédente, on a $e_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 = 100\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\text{D'où } e_n = d_n - 200 \iff d_n = 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200$$

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 200$.

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers 200.

4. a. $2n^2 - (n+1)^2 = \left(\left(\sqrt{2}-1\right)n - 1\right)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)n + 1\right)$.

D'après les résultats de première sur les trinômes du second degré, $2n^2 - (n+1)^2$ est donc positif pour $n \leqslant -\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ou $n \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}-1} \simeq 2,4$.

Donc, pour n entier supérieur à 3, on a $2n^2 - (n+1)^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$2n^2 \geqslant (n+1)^2.$$

b. Pour $n = 4$, on a bien $2^4 = 16 \geqslant 4^2 = 16$ donc la propriété est initialisée.

Supposons qu'il existe un entier $k > 4$ tel que $2^k \geqslant k^2$. En multipliant les deux membres de l'inéquation par 2 et en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$2^{k+1} \geqslant 2k^2 \geqslant (k+1)^2.$$

La propriété est donc héréditaire.

Initialisée et héréditaire, la propriété $2^n \geqslant n^2$ est donc vraie pour tout entier supérieur ou égal à 4.

c. D'après la question précédente, si n est un entier supérieur ou égal à 4, on $0 < n^2 \leqslant 2^n$. En composant, cette inégalité par la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en multipliant par 100, on obtient alors :

$$0 < \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2} \implies 0 < 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100n}{n^2} = \frac{100}{n}$$

d. D'après la question précédente et les théorèmes d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{100}{n} = 0$ et d'après les résultats sur les limites des suites géométriques de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

D'après les résultats sur les limites de sommes, on obtient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 340$$

1.(0.25p) 2.a.(0.5p) b.(0.5p) 3.a.(0.5p) b.(0.5p) c.(0.5p) 4.a.(0.5p) b.(0.75p)c.(0.5p) d.(0.5p)

<u>Exercice 5.</u> Non spé(5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + \sqrt{x^2+4}$ et C sa courbe représentative.

1. Montrons que pour tout réel $x, f(x) > 0$. **1 pt**

   $Pour\ tout\ réel\ x, \sqrt{x^2+4} > 0.$

   $Si\ x < 0, alors\ -x > 0\ donc\ par\ somme : f(x) > 0$

   $Pour\ tout\ réelx,\ x^2+4 > x^2\ ;$

   $en\ particulier\ pour\ x \geq 0, on\ en\ déduit\ que\ \sqrt{x^2+4} > x\ \ d'où - x + \sqrt{x^2+4} > 0\ \ soit\ f(x) > 0.$

2. Soit M et N les points de C d'abscisses respectives a et $-a$.

   Les coordonnées de M et N sont donc : M $\left(a\ ;\ -a + \sqrt{a^2+4}\right)$ et N $\left(-a\ ; a + \sqrt{a^2+4}\right)$

   a) Montrons que les droites (MN) obtenues en faisant varier a sont parallèles entre elles, c'est-à-dire que le coefficient directeur de (MN) est indépendant de a :

   Soit k le coefficient directeur de (MN) : **1 pt**

   $$k = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)}$$
   $$k = \frac{-a + \sqrt{a^2+4} - \left(a + \sqrt{a^2+4}\right)}{2a}$$
   $$k = \frac{-2a}{2a} = -1$$

   On en déduit que, quelque soit a, les droites (MN) de coefficient directeur -1, sont parallèles entre elles.

   b) Soit T la tangente à C au point M. Déterminons l'équation de T :
   $Pour\ tout\ réel\ x, x^2+4 > 0\ et\ la\ fonction\ racine\ carrée\ est\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}_+^*$
   $donc$
   $x \mapsto \sqrt{x^2+4}\ \ est\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}\ donc, par\ somme, f\ est\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}\ \ et$
   $$f'(x) = -1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

   On en déduit l'équation de T : **0,75 pt**

   $$y = \left(-1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}\right)(x-a) + \left(-a + \sqrt{a^2+4}\right)$$
   $$y = \left(\frac{a - \sqrt{a^2+4}}{\sqrt{a^2+4}}\right)x + \left(\frac{4}{\sqrt{a^2+4}}\right)$$

De même, pour l'équation de T', tangente à C au point N, on a : **0,75 pt**

$$y = \left(-1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}\right)(x+a) + \left(a + \sqrt{a^2+4}\right)$$
$$y = \left(\frac{-a - \sqrt{a^2+4}}{\sqrt{a^2+4}}\right)x + \left(\frac{4}{\sqrt{a^2+4}}\right)$$

On remarque que T et T' ont la même ordonnée à l'origine donc leur point d'intersection I est le point de coordonnées :

$$I\left(0\ ; \frac{4}{\sqrt{a^2+4}}\right)$$

0,5 pt

Si a varie dans $\mathbb{R}^*$, alors $\sqrt{a^2+4} \geq 2$ et donc $0 \leq \frac{4}{\sqrt{a^2+4}} \leq 2$: le point I varie sur le segemnt de l'axe des ordonnées entre 0 et 2. **1 pt**

Exercice 6 spé (5p)

Partie A : généralités

1. Soit $(x,\ y,\ z)$ un TP ; alors $x^2 + y^2 = z^2$. Soit p un entier naturel non nul.
   Alors $p^2 \times x^2 + p^2 \times y^2 = p^2 \times z^2$ ce qui équivaut à $(px)^2 + (py)^2 = (pz)^2$.
   Donc $(px,\ py,\ pz)$ est aussi un TP.

2. Soit $(x,\ y,\ z)$ un TP.
   On va utiliser deux résultats connus du cours : un nombre et son carré ont la même parité, et la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
   $$\left.\begin{array}{l} x \text{ impair} \Leftrightarrow x^2 \text{ impair} \\ y \text{ impair} \Leftrightarrow y^2 \text{ impair}\end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 + y^2 \text{ pair} \Longleftrightarrow z^2 \text{ pair} \Longleftrightarrow z \text{ pair}$$
   Donc x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance α de 2 par un entier impair k : $n = 2^\alpha \times k$

   a. La décomposition en facteurs premiers de 192 est $2^6 \times 3$; c'est aussi la *décomposition* de 192 au sens donné dans cet exercice.

   b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les *décompositions* sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.
   $x = 2^\alpha \times k \Longrightarrow x^2 = 2^{2\alpha} \times k^2 \Longrightarrow 2x^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$
   $z = 2^\beta \times m \Longrightarrow z^2 = 2^{2\beta} \times m^2$

   c. Pour que les deux nombres $2x^2$ et z^2 soient égaux, il faut et il suffit que leurs *décompositions* soient les mêmes (puisque cette *décomposition* est unique) ; l'un a pour *décomposition* $2^{\alpha+1} \times k^2$ et l'autre $2^\beta \times m^2$.
   Ces deux décompositions ne peuvent être les mêmes car $2\alpha + 1$ est impair et 2β est pair.
   Donc il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant : $x < y < z$.

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. $2015 = 5 \times 13 \times 31$; on en déduit que $2015 = 5 \times 403$.
   On sait que $(3,\ 4,\ 5)$ est un TP donc, d'après la question **1.** $(3 \times 403,\ 4 \times 403,\ 5 \times 403)$ est aussi un TP.
   Donc $(1209,\ 1612,\ 2015)$ est un TP.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $(2n+1)^2 + \left(2n^2+2n\right)^2 = \left(2n^2+2n+1\right)^2$.
   Si $2n+1 = 2015$, alors $n = 1007$.
   Pour $n = 1007$, on a : $(2n^2+2n)^2 = 2030112$ et $(2n^2+2n+1)^2 + 1 = 2030113$.
   Donc $(2015,\ 2030112,\ 2030113)$ est un TP.

3. a. On cherche deux entiers x et z tels que : $z^2 - x^2 = 403^2 \iff (z-x)(z+x) = 403^2$; or $403^2 = 169 \times 961$. Donc $z^2 - x^2 = 403^2 \iff (z-x)(z+x) = 169 \times 961$.
   Les nombres x et z tels que $\left\{\begin{array}{rcl} z-x &=& 169 \\ z+x &=& 961\end{array}\right.$ répondent à la question.
   $$\left\{\begin{array}{rcl} z-x &=& 169 \\ z+x &=& 961\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& 961-169 \\ 2z &=& 169+961\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& 792 \\ 2z &=& 1130\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 396 \\ z &=& 565\end{array}\right.$$
   Donc $565^2 - 396^2 = 403^2$.

   b. D'après la question **B 3.a)** : $396^2 + 403^2 = 565^2$; on en déduit que $(396,\ 403,\ 565)$ est un TP.
   En multipliant par 5 on obtient le TP cherché : $(5 \times 396,\ 5 \times 403,\ 5 \times 565) = (1980,\ 2015,\ 2825)$.

A)1.(0.5p) 2.(0.75p) 3.a.(0.25p) b.(0.75p) c.(0.5p) B)1.(0.5p)2.(0.5p) 3.a.(0.5p) b.(0.75p)